

解析函数 C-R 条件

设 $f(z)$ 定义在区域 D 上, $z_0 \in D$ 若 $\frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \rightarrow f'(z_0)$.

则称 $f(z)$ 在 z_0 点可导.

若 $f(z)$ 在 D 内每一点可导, 则称 $f(z)$ 在 D 内解析.

若 $f(z)$ 在 z_0 点的某一个邻域内可导, 则称 $f(z)$ 在 z_0 点解析.

~~z_0 点的某一个邻域内可导~~

定理: $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 $z = x + iy$ 可导的必要条件是 $u(x, y), v(x, y)$ 可微, 且满足 C-R 条件 $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

例 $w = \bar{z}$ 处处不解析 (是一个处处解析函数的共轭).

初等函数 1. 指数函数 $e^z := e^x(\cos y + i \sin y)$

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y.$$

$$u_x = e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y, \quad v_x = e^x \sin y, \quad v_y = e^x \cos y$$

故 $u_x = v_y, u_y = -v_x$, 满足 C-R 条件, 解析!

$$e^z \text{ 在 } D \text{ 上解析. 且 } (e^z)' = u_x + i v_x = e^z$$

$$e^{z+izk\pi} = e^z, \quad (k \neq 0)$$

2. 对数函数 $w = \ln z \Leftrightarrow z = e^w$

$$r(\cos \theta + i \sin \theta) = e^u(\cos v + i \sin v)$$

$$\Rightarrow e^u = r, \quad v = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

NO.

2

$$w = \ln z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{证 } \ln z = \ln|z| + i \arg z. \quad \text{证}$$

$$\text{则 } \ln z = \ln z + 2k\pi i$$

$$\text{证 } \ln_k z = \ln z + i \arg z + 2k\pi i$$

$$z = e^{w(z)} \Rightarrow 1 = e^{w(z)} \cdot w'(z) = w'(z) = \frac{1}{z}$$

$$\text{即 } (\ln_k z)' = \frac{1}{z}$$

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2, \quad \ln \frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2$$

Prop. 3.4.5.6.7

$$w = z^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} e^{\alpha \ln z}$$

~~当 $z \in \mathbb{R}^+$ 时, $z = 0$ 不成立~~

当 $0^\alpha = 0 (\alpha > 0)$

$$\text{当 } \alpha = n \in \mathbb{Z}, w = e^{n \ln z} = e^{n(\ln r + i\theta + 2k\pi i)} \quad (z = r(\cos \theta + i \sin \theta))$$

$$= e^{n \ln r + i n \theta + 2n k \pi i} = e^{n \ln r} (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$= r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$= z \cdots z \quad (\text{通常的定义})$$

$$= z^n \quad \text{符合定义}$$

$$\text{当 } \alpha = \frac{1}{n} (n \in \mathbb{Z}) \text{ 时 } W = e^{\alpha \ln z} = e^{\frac{1}{n} (\ln r + i(\theta + 2k\pi))}$$

$$= e^{\frac{1}{n} \ln r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

$$= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

$$= z^{\frac{1}{n}} \text{ (正常的开方定义). 故该定义是 well-defined.}$$

$z=0$, 如是支点

$$W = A^z = e^{z \operatorname{Lna}} \text{ (指定 } \operatorname{Lna}, \text{ 是单值函数)}$$

$$\text{三角函数: } e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta.$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$(\cos z)' = -\sin z$$

$$(\sin z)' = \cos z$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

可以验证, 实数的三角公式在复数域内均成立.

但不等式不成立, 注意到 $\sin z$ 无界, 甚至可以取到复平面上任一点

NO. 4

分支点: 如果一个函数上一点绕一条闭曲线转一圈回到自身, 函数值改变, 称该点为分支点. (不确切的定义)

确切地说, 无论该闭曲线任意接近该点, 值都会改变, 才叫分支点

例. $w = \sqrt[3]{z}$, $w_k(z) = \sqrt[3]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{3} \right)$

$w_k(i) = -i$ 求 $w_k(-i) = ?$

$w = \operatorname{Arsinh} z \Leftrightarrow z = \sinh w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$

$(e^{iw})^2 - 2iz e^{iw} - 1 = 0$

$\Rightarrow e^{iw} = \frac{1}{2} (2iz \pm \sqrt{-4z^2 + 4}) = iz \pm \sqrt{1 - z^2} = iz + \sqrt{1 - z^2}$

$\Rightarrow iw = \ln (iz + \sqrt{1 - z^2})$

$\Rightarrow w = -i \ln (iz + \sqrt{1 - z^2})$

第三章 复变函数的积分.

1. 复积分的定义.

设 $f(z)$ 是在简单曲线 $C: z=z(t) (t \in [a, b])$ 上的复变函数.
(通常要求光滑或分段光滑)

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k \stackrel{\text{def}}{=} \int_C f(z) dz \quad (\text{要说沿着 } C \text{ 的有向积分}).$$

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$$

$$\lambda = \max_{k=1, \dots, n} (\Delta z_k) \quad (\text{极端情况不能这么取})$$

$$\int_C f(z) dz = \int_C u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_C v(x, y) dx + u(x, y) dy$$

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \quad (\text{换元法依然成立. 要证})$$

作业 P39/15, 17

2. 复积分的性质.

$$(1) \int_C \alpha f(z) dz = \alpha \int_C f(z) dz. \quad \int_C (f(z) + g(z)) dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz$$

$$(2) \int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \dots + \int_{C_n} f(z) dz. \quad (C = C_1 + \dots + C_n)$$

$$(3) \int_{C^-} f(z) dz = - \int_C f(z) dz \quad (\text{反向积分})$$

$$(4) \left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| ds \leq M L$$

($M = \sup_{z \in D} \{ |f(z)| \}$, L 是曲线 C 的长度)

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy$$

参数方程 $z = z(t), (a \leq t \leq b)$

$$= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt$$

例1. ① $\int_C dz = \beta - \alpha$. (C 由 α 指向 β)

② $\int_C z dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n z_k \Delta z_k + \sum_{k=1}^n z_{k-1} \Delta z_k \right)$

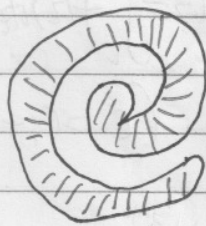
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_k z_{k-1}) + \sum_{k=1}^n (z_{k-1} z_k + z_{k-1}^2) \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (z_k^2 - z_{k-1}^2)}{2}$$

$$= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$$

例2. $\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^n}$ $C: |z-z_0|=r$

(通常认为 C 是 C^+ 正方向 (逆时针)). 定义是 well-defined?



← 这怎么办?

若曲线内部是在左边, 则规定为正方向

若曲线内部是在右边, 则规定为负方向

令 $z = z_0 + re^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

$$\int_C \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{r i e^{it}}{(r e^{it})^n} dt = i \int_0^{2\pi} r^{1-n} e^{i(1-n)t} dt$$

NO.

7

Green's thm

$$= \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

$$\int_C p dx + q dy = \iint_R \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx dy$$

§2 柯西定理.

1. 柯西定理: 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析. C 为 D 内一条简单曲线(光滑或分段光滑, 可求长). 则 $\int_C f(z) dz = 0$

$$\text{证明: } \int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy$$

$$\stackrel{\text{Green's thm}}{=} \iint_R (-v_x - u_y) dx dy + i \iint_R (u_x - v_y) dx dy \stackrel{\text{(C-R 条件)}}{=} 0$$

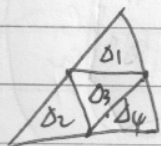
$$\text{C-R 条件} \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

上述证明是有问题的。因为 Green '公式' 成立的条件是不仅 u_x, u_y, v_x, v_y 存在, 且连续。

但解析不能保证所有偏导数连续。

下面给出柯西定理的证明。

证明: ① 三角形情形 设 $|\int_{\Delta} f(z) dz| = k$



$$\text{即. } \int_{\Delta} f(z) dz = \int_{\Delta_1} f(z) dz + \int_{\Delta_2} f(z) dz + \int_{\Delta_3} f(z) dz + \int_{\Delta_4} f(z) dz$$

$$\text{故 } \exists k \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ 使 } \left| \int_{\Delta_k} f(z) dz \right| \geq \frac{k}{4}$$

$$\text{同理, } \exists \Delta_{k_2} \text{ 使 } \left| \int_{\Delta_{k_2}} f(z) dz \right| \geq \frac{k}{4^2}$$

NO.

8

$\exists \Delta_1 > \Delta_2 > \dots > \Delta_n > \dots$, 使 $|\int_{\Delta_n} f(z) dz| \geq \frac{k}{4^n}$

由闭区间套 $\exists z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$.

则 $\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$ 当 $z \in B(z_0, \delta(\varepsilon))$ 时

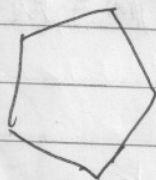
$\Rightarrow |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0| \leq \varepsilon L_n (L_n \Delta_n \text{ 的直径})$

于是 $\frac{k}{4^n} \leq |\int_{\Delta_n} f(z) dz| = |\int_{\Delta_n} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)) dz|$

$$\leq \varepsilon L_n \cdot L_n = \frac{\varepsilon L^2}{4^n}$$

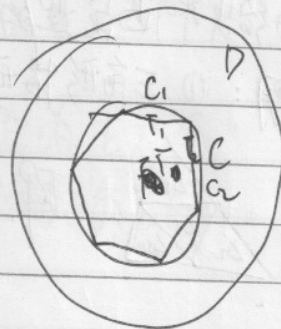
$$\Rightarrow k \leq \varepsilon L^2 \rightarrow 0 \Rightarrow k=0$$

② 多边形



用割补法易证.

$$\begin{aligned} & \textcircled{3} \left| \int_{\Gamma} f(z) dz - \int_{\Gamma_k} f(z) dz \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \left(\int_{C_k} f(z) dz - \int_{\Gamma_k} f(z) dz \right) \right| \end{aligned}$$



$$= \left| \sum_{k=1}^n \left(\int_{C_k} (f(z) - f(z_k)) dz - \int_{\Gamma_k} (f(z) - f(z_k)) dz \right) \right|$$

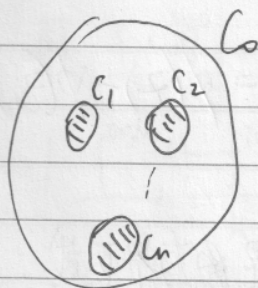
$$\leq \sum_{k=1}^n \left| \int_{C_k} (f(z) - f(z_k)) dz \right| + \left| \int_{\Gamma_k} (f(z) - f(z_k)) dz \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \left(\varepsilon |C_k| + \varepsilon |\Gamma_k| \right) \leq 2\varepsilon \sum_{k=1}^n |C_k| = 2\varepsilon |D| \rightarrow 0$$

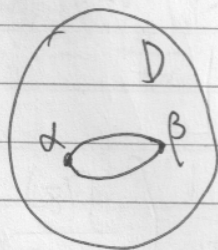
$$\text{故 } \int_C f(z) dz = 0 \quad \#$$

一般形式: 设 $f(z)$ 在 D 内解析, 连通到边界 $C = C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_n$

则 f 在 D 上连续, 则 $\int_C f(z) dz = 0$.



2. 不定积分. 若 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, 则 $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$



则 $F(z)$ 是 D 内的一个单值函数, 且 $F'(z) = f(z)$.

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \left| \frac{\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta}{\Delta z} - f(z) \right|$$

$$= \left| \frac{\int_z^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta}{\Delta z} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta) d\zeta - \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z) d\zeta \right|$$

$$= \frac{1}{|\delta z|} \left| \int_z^{z+\delta z} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right|$$

$$\leq \frac{1}{|\delta z|} \varepsilon |\delta z| = \varepsilon$$

$$\text{令 } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ 得 } F'(z) = f(z)$$

推论: 若 $\phi(z)$ 为 $f(z)$ 在单连通区域 D 内的一个原函数, 则

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \phi(z) - \phi(z_0)$$

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \Rightarrow F'(z) = f(z) = \phi'(z) \Rightarrow F(z) = \phi(z) + C$$

$$\downarrow \\ F(z_0) = 0 \Rightarrow C = -\phi(z_0) \Rightarrow \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = F(z) = \phi(z) - \phi(z_0)$$

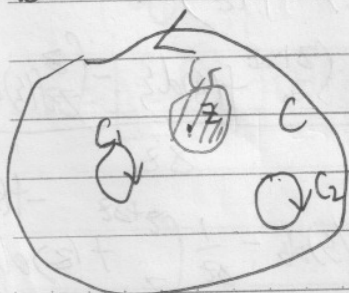
§3 柯西公式

1. 柯西公式: 设 D 是以有限条简单闭曲线 C 为边界的有界区域, 设 $f(z)$ 在 D 及 C 所组成的闭区域 $\bar{D}$ 上解析, 那么在 D 内任一点 z ,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \in D) \quad (\text{在 } D \text{ 上解析, 连续到 } \partial D)$$

证:

$$\text{事实上, } \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \right|$$



$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left| \int_C \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \quad (*)$$

NO.

11 101
 $|z - z_0| < \delta$
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 当 $|z - z_0| < \delta$ 时, 有 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

令 C_r 的半径为 r , 则 $(*) \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{r} \cdot 2\pi r = \varepsilon$
 $\delta \leq r$

推论 若 $z \notin \bar{D}$, 则 $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$.

(因为 $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ 在 D 内解析, 由柯西定理可知积分为 0)

高阶形式:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \quad (z \in D).$$

证: 归纳法证之, $n=0$ 已证. 下设上式对 $n-1$ 成立, 证对 n 成立.

$$f^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^n} d\xi.$$

$$\left| \frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} - \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \right|$$

$$= \left| \frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} - \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \right|.$$

归纳假设

$$\stackrel{(n-1)!}{2\pi i} \left| \int_{C_r} \left(\frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)^n} - \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^n} - \frac{nf(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} h \right) d\xi \right|$$

$$= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \left| \int_{C_r} f(\xi) \cdot \frac{(\xi - z)^{n+1} - (\xi - z)(\xi - z - h)^n - nh(\xi - z - h)^n}{(\xi - z - h)^n (\xi - z)^{n+1} h} d\xi \right|$$

上式分子

Bosht

$$\textcircled{2} \xi - z - h = w. \quad \text{原式}$$

$$\textcircled{2} A = (\xi - z)^{n+1} - (\xi - z)(\xi - z - h)^n - nh(\xi - z - h)^n$$

$$\text{则 } |A| = |(w+h)^{n+1} - (w+h)w^n - nhw^n|$$

$$= |(w+h)^{n+1} - w^{n+1} - (n+1)w^n h|$$

$$\leq A_1 |h|^2 \quad A_1 \text{ 为正常数.}$$

$$\textcircled{1} (*) = \frac{(n-1)!}{2\pi} \left| \int_{C_r} f(\xi) \cdot \frac{A}{(\xi - z - h)^n (\xi - z)^{n+1} h} d\xi \right|$$

$$\textcircled{2} \sup_{\xi \in C_r} |f(\xi)| = M \sqrt[n]{|h| \leq \frac{r}{2}} \quad (*) \leq \frac{(n-1)!}{2\pi} \left| \int_{C_r} \frac{MA_1 |h|^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^n \cdot r^{n+1} \cdot |h|} d\xi \right|$$

$$\leq \frac{(n-1)!}{2\pi} \frac{MA_1 |h|^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^n r^{n+1} \cdot |h|} \cdot 2\pi r \quad (C_r \text{ 半径为 } r)$$

$$= \frac{(n-1)! MA_1 \cdot 2^n}{r^{2n}} \quad (**)$$

$$\text{记 } \frac{(n-1)! MA_1 \cdot 2^n}{r^{2n}} = M^* \quad (M^* \text{ 为常数}), \quad \text{则 } (*) \leq M^* |h|$$

$$\text{令 } |h| \rightarrow 0 \text{ 即证. } \#$$

NO.

13

例 $f(z) = \int_{|z|=2} \frac{\xi^2 + \xi + 1}{(\xi - z)^2} d\xi$, 求 $f(i)$, $f'(i)$, $f'(2+i)$

解: $f(z) = 2\pi i \cdot \frac{1!}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{(\xi^2 + \xi + 1)}{(\xi - z)^2} = g(\xi)$
 $= \begin{cases} (\xi^2 + \xi + 1)' \cdot 2\pi i, & |z| < 2 \\ 0, & |z| > 2 \end{cases} = 2\pi i (2z + 1), |z| < 2$

注: 在 D 上的积分称为奇异积分. 不在本课程讨论范围内.

例 $f(i) = -4\pi + 2\pi i$ 也不适用柯西公式

$f'(z) = \begin{cases} 4\pi i, & |z| < 2 \\ 0, & |z| > 2 \end{cases}$ 例 $f'(i) = 4\pi i$
 $f'(2+i) = 0$

2. 解析函数的无穷可微性.

3. 柯西不等式: 设 $f(z)$ 在圆盘 $D: |z - z_0| < R$ 内解析. 连续到边界.

则 $\frac{|f^{(n)}(z_0)|}{n!} \leq \frac{M(R)}{R^n}$ ($M(R) := \max_{|z|=R} |f(z)|$).

证: 由柯西公式 $\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right|$

$\leq \frac{1}{2\pi} \frac{M(R)}{R^{n+1}} \cdot 2\pi R \cdot \left(\sup_{z \in C} |f(z)| = M(R) \right)$

$= \frac{M(R)}{R^n}$ #

4. 刘维尔定理: 有界整函数必有常数. 令 $n=1$ 由柯西不等式得 (在 D 上解析).

5. 代数基本定理: 在 $\mathbb{C}$ 上非常数多项式 $p(z)$ 必有一个根
 证: 假设 $p(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上无根, 则 $\frac{1}{p(z)}$ 在 $\mathbb{C}$ 上解析.

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{p(z)} \right| \rightarrow 0. \text{ 故 } \exists R > 0. \text{ 当 } |z| > R \text{ 时 } \left| \frac{1}{p(z)} \right| < 1$$

又在 $|z| \leq R$ 上 $\frac{1}{p(z)}$ 连续, 故 $\exists M_0 > 0$, 当 $|z| \leq R$

$$\left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq M_0 \text{ 便有 } \left| \frac{1}{p(z)} \right| \leq \max\{M_0, 1\} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

由刘维尔定理, $\frac{1}{p(z)}$ 为常数. #. 漂亮的证明!

6. 莫勒拉定理 (柯西定理之逆).

设 $f(z)$ 在区域 D 内连续, 对 D 内任一闭曲线 C 有 $\int_C f(z) dz = 0$.
 则 $f(z)$ 在 D 内解析.

$$\text{证: } F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \Rightarrow F(z) \text{ 可导, 且 } F'(z) = f(z) dz.$$

$F(z)$ 在 D 内解析 $\Rightarrow f'(z)$ 存在 $\Rightarrow f(z)$ 在 D 内解析

$$7. f(z) = u + iv \xLeftrightarrow{\text{解析}} u, v \text{ 可微} \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \xLeftrightarrow{\text{连续}} \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \text{ 连续}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ f' \text{ 存在} & \Rightarrow & \text{连续} \\ \parallel & & \downarrow \\ u_x + iv_x & & u_x, v_x \text{ 连续} \end{array}$$

§4 调和函数

1. 调和函数. 设 $u(x, y)$ 在区域 D 内有连续的二阶偏导数, 且满足拉普拉斯方程 $u_{xx} + u_{yy} = 0$. 则称 $u(x, y)$ 为 D 内的调和函数. 若区域 D 内的两个调和函数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ 满足

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

则称 $v(x, y)$ 与 $u(x, y)$ 为共轭调和函数

$f = u + iv$ 解析 $\Rightarrow \begin{cases} u, v$ 有任意阶偏导数. \\ u, v 满足 C-R 条件. \end{cases}



v 为 u 的共轭调和函数

~~v 为 u 的共轭调和函数~~

证: u 调和 $\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow (-u_y)_y = (u_x)_x$

取 $p = -u_y$, $q = u_x \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$

$\Rightarrow p dx + q dy$ 为全微分. $v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} p dx + q dy + C$

$v_x = p = -u_y$, $v_y = q = u_x$

$\Rightarrow v$ 是 u 的共轭调和函数 $\Rightarrow f = u + iv$ 解析

例: 设 $u(x, y) = xy$ 为实部的解析函数求 $f(z) = i$. ~~$u_{xx} + v_{yy} = 0$~~

解: $u_{xx} + v_{yy} = 0$. 满足 Laplace 方程.

① $u = xy$, $u_x = y$, $u_y = x$. $\begin{cases} v_x = -u_y = -x \\ v_y = u_x = y \end{cases}$

$\Rightarrow v = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + C$

$$f(z) = u + iv = xy + i\left(-\frac{1}{2}(y^2 - x^2) + C\right) = -\frac{i}{2}(x + iy)^2 + C$$

$$f(0) = i \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(z) = -\frac{i}{2}z^2 + i$$

$$v(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} -x dx + y dy + C$$

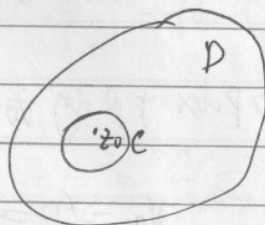
作业 P57 / 16, 17, 18 P165 / 1, 2, 3.

(当中缺一次).

设 $f_n(z)$ 在区域 D 内解析, $\sum f_n(z)$ 在 D 内内闭一致收敛于 $f(z)$,
则 $f(z)$ 在 D 内解析, 且 $f^{(k)}(z) = \sum f_n^{(k)}(z)$.

证: $f(z)$ 在 D 内解析之前已证.

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$$



$$\sum f_n^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$$

只须证: $\sum \int_C \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = \int_C \frac{\sum f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$

$$\sum \int_C \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$$

注意到 $\sum f_n(z) \rightarrow f(z)$. 故 $\left| \frac{\sum f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}} - \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \right|$

$$= \left| \frac{1}{(z-z_0)^{k+1}} \right| \cdot \left| \sum f_n(z) - f(z) \right| \rightarrow 0$$

故

于是

3. 幂级数
 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

(1) Abel 定理
满足

证: $|x_n|$

而

(2) 收敛性
(a). D'

(b) Cauchy

(c) Cauchy

证: 下证

$$\text{故 } \sum \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}} \Rightarrow \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$$

$$\text{于是 } f^{(k)}(z) = \sum f_n^{(k)}(z_0) \quad \#$$

3. 幂级数.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots$$

(1) Abel 定理: 若 $\sum a_n (z-z_0)^n$ 在 $z=z_1 (\neq z_0)$ 收敛, 那么对满足 $|z-z_0| < |z_1-z_0|$ 的任何 z 不仅收敛, 而且绝对收敛.

$$\text{证: } |a_n (z-z_0)^n| = |a_n (z_1-z_0)^n| \cdot \left| \frac{z-z_0}{z_1-z_0} \right|^n \leq M \cdot \left(\frac{r}{r_1} \right)^n$$

(r < r_1)

而 $\sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{r}{r_1} \right)^n$ 收敛, 故 $\sum a_n (z-z_0)^n$ 在 $|z-z_0| < |z_1-z_0|$ 上一致收敛. 且绝对收敛.

(2) 收敛半径 $R = \frac{1}{l}$

(a) D'Alembert: $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

(b) Cauchy: $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

(c) Cauchy-Hadamard: $l = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

证: 下证 (a), (c) 易见 (c) $\Rightarrow$ (b).

不妨设 $z \neq z_0$.

(a) 设 $|z - z_0| < \frac{1}{l}$, 则 $l < \frac{1}{|z - z_0|}$ ($\exists 0 < \lambda < 1$)

故当 n 充分大时, $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \frac{\lambda}{|z - z_0|} \Leftrightarrow \left| \frac{a_{n+1} (z - z_0)^{n+1}}{a_n (z - z_0)^n} \right| < \lambda$

$\Leftrightarrow \frac{|a_{n+1} (z - z_0)^{n+1}|}{|a_n (z - z_0)^n|} < \lambda$

由正项级数 D'Alembert 判别法可得.

若 $|z - z_0| > \frac{1}{l}$, $l > \frac{1}{|z - z_0|}$.

$\Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > \frac{1}{|z - z_0|}$ (n 充分大)

$\Rightarrow \left| \frac{a_{n+1} (z - z_0)^{n+1}}{a_n (z - z_0)^n} \right| > 1 \Rightarrow a_n (z - z_0)^n \rightarrow \infty$ 发散

(c) 设 $|z - z_0| = \frac{1}{l}$, 则 $l = \frac{1}{|z - z_0|} \Rightarrow \exists \lambda$ ($0 < \lambda < 1$)

s.t. $l < \frac{\lambda}{|z - z_0|}$.

当 n 充分大 $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{\lambda}{|z - z_0|} \Rightarrow |a_n (z - z_0)^n| < \lambda^n$

若 $|z - z_0| > \frac{1}{l} \Rightarrow l > \frac{1}{|z - z_0|}$.

$\exists$ 子列 $\{n_k\}$ s.t. $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|z - z_0|}$

$\Rightarrow |a_{n_k} (z - z_0)^{n_k}| > 1$ #

(3) 幂级数的解析性.

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ 在其收敛圆 $k: |z-z_0| < R$ 中绝对收敛.

且内闭一致收敛. 其和函数 $f(z)$ 在 k 内解析, 且.

$$(a) f'(z) = 0! a_1 + \frac{(n+1)!}{1!} a_{n+1} (z-z_0) + \frac{(n+2)!}{2!} a_{n+2} (z-z_0)^2 + \dots$$

$$(b) a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

§2 泰勒展开

1. 泰勒定理. 设 $f(z)$ 在圆盘 $k: |z-z_0| < R$ 内解析, 则在 k 内

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{其中} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi$$

$$= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

且展式唯一.

证明: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi$. (取 C 为以 z_0 为中心的圆, $C \subset k$)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n, \quad C_p: |z-z_0| = p \quad (0 < p < R)$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

证: $\forall z \in k$. 取 $p > 0$ $|z-z_0| < p < R$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_p} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi.$$

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0)(z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}$$

即 $\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}$

两端沿着 C 积分: 注意 $\left| \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n \right|$

$$\leq \frac{M r^n}{\rho^{n+1}} = \frac{M}{\rho} \left(\frac{r}{\rho} \right)^n.$$

故可交换求和与积分.

$$\int_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \cdot (z - z_0)^n d\xi.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi (z - z_0)^n$$

$$(\Rightarrow) f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n$$

$$\triangleq C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \quad \text{即 } \bar{z}.$$

$$\text{例} | e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} + \dots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + \dots$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$$

2. 解析函数的零点孤立性与唯一性

零点孤立性, 设 $f(z)$ 在 z_0 点解析, $f(z_0) = 0$, $f(z)$ 非常数.
 则 z_0 的邻域 N s.t. $f(z)$ 在 $N \setminus \{z_0\}$ 内无零点

证: f 在 z_0 解析. 又因为 $f(z_0) = 0$,

$$f(z) = C_k(z-z_0)^k + C_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \dots$$

~~C_k 为最小非零项~~ 其中 $C_0 = \dots = C_{k-1} = 0$, $C_k \neq 0$.

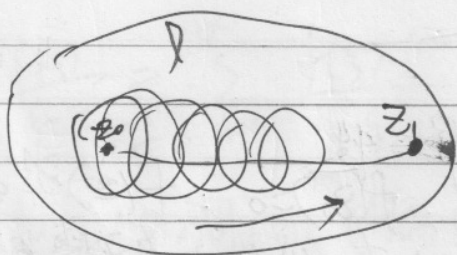
$$f(z) = (z-z_0)^k (C_k + C_{k+1}(z-z_0) + \dots)$$

$$= (z-z_0)^k g(z)$$

$$g(z_0) = C_k \neq 0 \Rightarrow \exists N \ni z_0 \text{ s.t. } \forall z \in N, |C_k| \neq 0$$

$$|g(z)| > \frac{1}{2}|g(z_0)| \Rightarrow g(z) \neq 0$$

(区域)零点孤立性. 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析且不恒等于 0.
 若 $f(z_0)=0$ ($z_0 \in D$) 则存在 z_0 的一个邻域 N ,
 使得在 $N \setminus \{z_0\}$ 均有 $f(z) \neq 0$ ($z \in N \setminus \{z_0\}$)



唯一性定理: 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 在区域 D 内解析且在 D 内有一个收敛于 $z_0 \in D$ 的点列 $\{z_n\}$ ($z_n \neq z_0, n=1, 2, \dots$)
 使得 $f(z_n)=g(z_n)$. 则在 D 内 $f(z) \equiv g(z)$

证: 令 $h(z) = f(z) - g(z)$ 使用零点孤立定理即可证.

3. 最大模原理.

设 $f(z)$ 在区域 D 内解析且不恒为常数, 则 $f(z)$ 在 D 内任何点都不能取到最大模.

证: ~~反设~~ 反设 $\exists z_0 \in D$ 使 $|f(z)| \leq |f(z_0)| \quad \forall z \in D$.

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta.$$

④ 使用连续性. 推几步可知必恒等. 不然会产生不等式

我来证: 设存在 $z_0' \in D$ 使得 $|f(z_0')| < |f(z_0)|$, 设 z_0' 位于 $z_0 + r^* e^{i\theta^*}$ 上. 则由连续性, $\exists \theta'$, 使 ~~当~~ 当 $\theta \in (\theta^* - \theta', \theta^* + \theta')$ 均有.

$$|f(z_0 + r^* e^{i\theta})| \leq |f(z_0)| - \frac{1}{2} (|f(z_0)| - |f(z_0')|).$$

$$\text{于是 } |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r^* e^{i\theta})| d\theta \stackrel{\Delta}{=} |f(z_0)| - C \quad (C > 0).$$

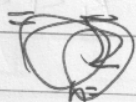
$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\theta^* - \theta'}^{\theta^* + \theta'} |f(z_0 + r^* e^{i\theta})| d\theta \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^{\theta^* - \theta'} + \int_{\theta^* + \theta'}^{2\pi} \right) |f(z_0 + r^* e^{i\theta})| d\theta \right).$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} (2\theta' (|f(z_0)| - C) + (2\pi - 2\theta') |f(z_0)|)$$

$$= |f(z_0)| - \frac{C \cdot 2\theta'}{2\pi} \text{ 矛盾!}$$

罗朗展式. 罗朗级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z - z_0)^n$



$$= \dots + \alpha_{-n} (z - z_0)^{-n} + \dots + \alpha_{-1} (z - z_0)^{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 (z - z_0) + \dots + \alpha_n (z - z_0)^n + \dots$$

$$\downarrow$$

$$f_1(z)$$

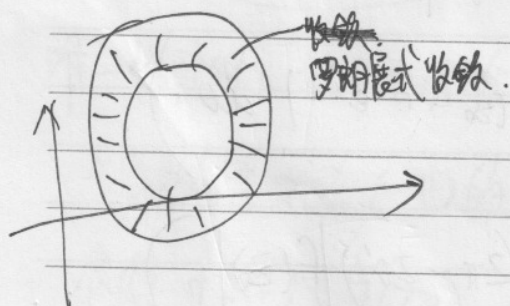
$$\text{令 } \frac{1}{z-z_0} = \zeta, \quad f_2 = \alpha_{-1}\zeta + \dots + \alpha_{-n}\zeta^n.$$

$f_1(z)$ 在 $|z-z_0| < R$ 收敛.

$f_2(z)$ 在 $|\zeta| < R_1$ 收敛 即在 $\frac{1}{|z-z_0|} < R_1$ 收敛.

即在 $|z-z_0| > \frac{1}{R_1} = r$ 上收敛.

综上, 若 $r < R$, 则 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z-z_0)^n$ 在 $r < |z-z_0| < R$ 内收敛.



2. 罗朗定理: 设函数 $f(z)$ 在圆环 $D: R_1 < |z-z_0| < R_2$ ($0 \leq R_1 < R_2 \leq +\infty$) 内解析. 那么在 D 内: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n (z-z_0)^n$. 其中:

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad \text{其中 } \gamma \text{ 是圆 } |z-z_0| = \rho.$$

$n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ $(R_1 < \rho < R_2)$

且展式唯一.

证明方式类似泰勒定理.

$$\text{证: } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

$$r < \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 < R.$$

$$\xi \text{ 在 } C_2 \text{ 上: } \frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}$$

$$\frac{f(\xi)}{\xi - z_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n \quad (\text{在 } C_2 \text{ 上收敛}).$$

$$\text{故 } \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi (z - z_0)^n$$

可换积分号
与 \$\sum\$ 号.

$$\xi \text{ 在 } C_1 \text{ 上: } \frac{-1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (\text{在 } C_1 \text{ 上收敛})$$

$$\begin{aligned} \text{于是 } \int_{C_1} \frac{-f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{C_1} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\xi - z_0)^{-n+1}} d\xi \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{C_1} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^{-1-n}}{(\xi - z_0)^{-n}} \quad \text{Boshi} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\xi - z_0)^{-n+1}} \end{aligned}$$

将 C_1, C_2 换成任意 ρ $|z-z_0|=p$ ($R_1 < p < R_2$) 均可

$$\text{综上有 } f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n.$$

此为 Laurent 展式. 唯一性留数读者.

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n}_{\downarrow \text{解析部分}} + \underbrace{\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-z_0)^n}_{\downarrow \text{主要部分}}$$

罗朗展式 $\frac{\sinh z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$

$$\frac{\cosh z}{z} = \frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \dots$$

已解析出来的孤立奇点

设 $f(z)$ 在 H 内 $0 < |z-z_0| < R$ 内解析, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点

在 H 内 $f(z)$ 有罗朗展式 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$

称 $f(z)$ 为

(1) 可去奇点

称 z_0 为 $f(z)$ 的: (1) 可去奇点 若 $a_{-m} = 0$ ($m=1, 2, \dots$)

(2) 极点

若只有有限个 a_{-m} 不为 0

($m=1, 2, \dots$)

NO.

27

 $(n \in \mathbb{Z}^+)$

n 阶(级)极点. 若 $\alpha_{-n} \neq 0$ 但 $\alpha_{-m} = 0$ ($m = n+1, n+2, \dots$).

主要部分为 $\frac{\alpha_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{\alpha_{-1}}{(z-z_0)^{-1}}$

本性极点. 若有无穷个 $\alpha_{-m} \neq 0$ ($m = 1, 2, \dots$).

定理. z_0 为 $f(z)$ 的

(1) 可去奇点 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \alpha_0$ (α_0 为某一有限复数.
 $\Rightarrow f(z)$ 在 z_0 点附近有界)

(2) ① 极点 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

② n 阶极点 $\Leftrightarrow f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$ ($\varphi(z)$ 在 z_0 点解析
 $\Rightarrow \varphi(z_0) \neq 0$)
 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z-z_0)^n = \beta_0$
 $(\beta_0 \neq 0, \text{且 } \beta_0 \in \mathbb{C})$.

③ 本性极点

$\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 不存在也不为 ∞

孤立极点, $f(z)$ 在 z_0 附近解析. 但不在 z_0 解析. 可做罗朗展开

z_0 可去 $\Rightarrow f(z) = \alpha_0 + \alpha_1(z-z_0) + \alpha_2(z-z_0)^2 + \dots$

$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \alpha_0 (\in \mathbb{C}) \Rightarrow |f(z)| \leq \exists M > 0$

$(0 < |z-z_0| < \exists r)$ Boshi

$$\Rightarrow |a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot M \cdot r^{n-1} \cdot 2\pi r = M r^n \rightarrow 0$$

$\Rightarrow z_0$ 可去

(2) 极点 $\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$

n 阶极点 $\Rightarrow f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$ 其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 点解析
 $\varphi(z_0) \neq 0$

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^n f(z) = \beta_0 \quad (\beta_0 \in \mathbb{C}, \neq 0, \neq \infty)$$

$$f(z) \text{ 为 } n \text{ 阶极点} \Rightarrow f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)^1} + a_0 + \dots$$

$(a_{-n} \neq 0)$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{a_{-n} + a_{-n+1}(z-z_0) + a_{-n+2}(z-z_0)^2 + \dots}{(z-z_0)^n}$$

$$\text{令 } \varphi(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-z_0) + \dots$$

$$\text{则 } \varphi(z) \text{ 在 } z_0 \text{ 点解析 } \varphi(z_0) = a_{-n} \neq 0$$

$$\text{令 } f(z) / (z-z_0)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{\beta_0 + \beta_1(z-z_0) + \dots}{(z-z_0)^n} = \frac{\beta_0}{(z-z_0)^n} + \frac{\beta_1}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots$$

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = \beta_0 (\neq 0, \neq \infty)$$

$$f(z) = \frac{p(z)}{(z - z_0)^n} \quad (p(z_0) \neq 0) \Rightarrow (z - z_0)^n f(z) = p(z) \rightarrow p(z_0) \neq 0$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = \beta_0 (\neq 0, \infty) \quad (z \rightarrow z_0).$$

$$\textcircled{1} z_0 \text{ 为 } f(z) \text{ 的极点} \Rightarrow f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n} \rightarrow \infty (z \rightarrow z_0)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \quad (\Rightarrow) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

$\Rightarrow z_0$ 为 $\frac{1}{f(z)}$ 的可去奇点

$$\text{即 } \frac{1}{f(z)} = \varphi(z) \quad (0 < |z - z_0| < r)$$

$$\text{且 } \varphi(z) \text{ 在 } |z - z_0| < r \text{ 中解析. } \varphi(z) = a_n (z - z_0)^n + a_{n+1} (z - z_0)^{n+1} + \dots$$

$$= (z - z_0)^n (a_n + a_{n+1} (z - z_0) + \dots)$$

$$\frac{1}{f(z)} = \varphi(z) = (z - z_0)^n \varphi_1(z).$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1/\varphi_1(z)}{(z - z_0)^n} = \frac{\varphi_2(z)}{(z - z_0)^n} \quad (\varphi_2(z) \text{ 在 } z_0 \text{ 解析})$$

$$\text{且 } \varphi_2(z_0) = \frac{Boshi}{\varphi_1(z_0) \neq 0}$$

$\Rightarrow z_0$ 为 $f(z)$ 的 (n) 阶极点

(3) 本性奇点 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 不存在, $\neq \infty$

证明: z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点 $\Leftrightarrow z_0$ 不为可去奇点, 也不为极点

(i) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 不存在, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \neq \infty$

解析函数在无穷远点的性质

设 $f(z)$ 在区域 $D: R < |z| < +\infty$ 内解析. 则称 $z = \infty$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点. 在 D 内: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$

令 $w = \frac{1}{z}$. 则 $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n w^{-n}$$

$$R < |z| < +\infty \Leftrightarrow 0 < |w| < \frac{1}{R}$$

$0 < |w| < \frac{1}{r}$ 解析. 证以 w 为 $f(z)$ 的可去奇点,

(m 阶) 极点, 本性奇点. 如果 $w=0$ 为 $g(w)$ 的可去奇点,

(n 阶) 极点, 本性奇点

为极点

① w 为可去奇点, 若 $\alpha_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$)

② w 为 (n 阶) 极点. 若只有有限个 α_n 不为零.

$\alpha_n = 0$ 但 $\alpha_{n+1} = \alpha_{n+2} = \dots = 0$.

③ w 为本性奇点. 若有无穷多 $\alpha_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$).

$$f(z) = \dots + \alpha_{-n} z^{-n} + \dots + \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_n z^n + \dots$$

讨论点的主要部分

定理: 点 w 为 $f(z)$ 的.

(1) 可去奇点 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow w} f(z) = \alpha_0$ ($\in \mathbb{C}$).

$\Leftrightarrow f(z)$ 在 w 点附近有界.

(2) 极点 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow w} f(z) = \infty$.

n 阶极点 $\Leftrightarrow f(z) = z^n \varphi(z)$. $\varphi(z)$ 在 w 解析
 $\varphi(w) \neq 0$

NO. 32

(3) 本性奇点 $\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 不存在, $\neq \infty$

b. Weierstrass & Picard 定理.

设 $f(z)$ 在去心圆盘 $H_0: 0 < |z - z_0| < R$ ($R > 0$) 内解析, 那么 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall$ 有限复数 r 可点列 $z_n \rightarrow z_0$ ($z_n \in H_0$) s.t.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = r.$$

" $\Leftarrow$ " 充分性. 显然

" $\Rightarrow$ " 必要性. $\forall r \in \mathbb{C}$, 设 $\frac{1}{f(z) - r}$ 在 $0 < |z - z_0| < \delta$ ($\delta > 0$) 内有界, 即 $g(z) = \frac{1}{f(z) - r}$ 在 z_0 点解析.

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{g(z)} + r$ 不以 z_0 为本性奇点, 矛盾!

所以 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $\frac{1}{f(z) - r}$ 在 $0 < |z - z_0| < \frac{1}{n}$ 无界

即 $\exists z_n: 0 < |z_n - z_0| < \frac{1}{n}$ s.t. $|\frac{1}{f(z_n) - r}| > n$.

故 $z_n \rightarrow z_0$ ($z_n \neq z_0$), $f(z_n) - r \rightarrow 0$. $\#$

Picard 大定理: 设 $f(z)$ 在 $H_0: 0 < |z - z_0| < R$ 内解析

则若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点 $\Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{C}$ 至少可有一个例外. 在 H_0 内 $\exists$ 点列 $z_n: z_n \rightarrow z_0$ s.t. $f(z_n) = r$

第五章 留数.

§1. 留数与留数定理.

1. 留数: 设 $f(z)$ 在 $0 < |z - z_0| < r$ 内解析. $0 < r < R$.

$C_r: |z - z_0| = r$.

定义留数 $\text{Res}(f(z), z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(z) dz$.

$$\int_{C_r} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \int_{C_r} (z - z_0)^n dz = 2\pi i a_{-1}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(z) dz = a_{-1}, \quad \text{即 } \text{Res}(f, z_0) = a_{-1},$$

(罗朗级数中 a_{-1})

设 $f(z)$ 在 $|z| > R$, $C_r: |z| = r$.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n.$$

$$\text{定义 } \text{Res}(f(z), +\infty) \triangleq -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r^-} f(z) dz$$

$$= -a_{-1}$$

$$\int_{C_r^-} f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \int_{C_r^-} z^n dz = -2\pi i a_{-1}$$

如果是可去极点 z_0 ($z_0 \neq \infty$), 则 $\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = 0$

但若 ∞ 为可去极点, $\frac{1}{z}$ 中 ∞ 为可去奇点, 但 $\text{Res}(f, \infty)$

$$= -a_{-1} = -1 \neq 0.$$

2. 留数定理.

除去 $z_1, \dots, z_n$ 点之外设 $f(z)$ 在复围线 C 所围区域 D 内解析. 在 $\bar{D} = D \cup C$ 上连续.

$$\text{则 } \int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

证: 由 Cauchy 定理 $\int_C f(z) dz + \int_{\Gamma_1^-} f(z) dz + \dots + \int_{\Gamma_n^-} f(z) dz = 0$

$$\begin{aligned} \text{故 } \int_C f(z) dz &= \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\Gamma_n} f(z) dz \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k) \quad \text{即证.} \end{aligned}$$

推论: 设 $f(z)$ 在复平面除了有限个点 $z_1, \dots, z_n$ 上解析.

$$\text{则 } \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k) + \text{Res}(f, +\infty) = 0$$

$$\text{证: } -\text{Res}(f, +\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

NO.

35

3. 留数计算

设 z_0 为 $f(z)$ 的 n 阶极点, $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$ ($\varphi(z_0) \neq 0$)

$$\text{则 } \operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{\varphi(z) dz}{(z-z_0)^n} = \frac{\varphi^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$$

若 z_0 为 $f(z)$ 的简单极点, 则 $\operatorname{Res}(f, z_0) = \varphi(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)f(z)$

设 $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ ($p(z_0) \neq 0, q(z_0) = 0, q'(z_0) \neq 0$).

$$\text{则 } \operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) \frac{p(z)}{q(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{p(z)}{\frac{q(z)-q(z_0)}{z-z_0}}$$

$$= \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

例: (1) $f(z) = \frac{z^{2n}}{(z-1)^{n+1}}$ $1, \infty$ 为孤立奇点

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \frac{(z^{2n})^{(n+1)}}{(n+1)!} = \frac{2n(2n-1)\cdots(n+2)}{(n+1)!} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$$

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{Res}(f, 1) = -\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$$

(2) $f(z) = \tan \pi z$

$f(z) = \frac{\sin \pi z}{\cos \pi z}$, $z_k = \frac{2k+1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ 为孤立奇点 (简单极点).

$$\text{故 } \operatorname{Res}(f, k+\frac{1}{2}) = \frac{\sin \pi z_k}{-\pi \sin \pi z_k} = -\frac{1}{\pi}$$

因为 $z_k \rightarrow \infty$ 不是孤立奇点

由留数定理 $\int_{|z|=n} \tan \pi z \, dz = 2\pi i \sum_{k=-n}^{n-1} z_k$

$$= 2\pi i \left(-\frac{1}{n}\right) 2n = -4\pi i \quad (n \in \mathbb{N}^+)$$

(3) ~~z~~ $f(z) = z^m \sin \frac{1}{z}$. (m 是整数)

孤立奇点 $0, \infty$

$$\begin{aligned} f(z) = z^m \sin \frac{1}{z} &= z^m \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{m-2n-1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (*) \end{aligned}$$

1° 若 m 是奇数, 则 $(*)$ 的 z^{-1} 项系数为 0. 故 $\text{Res}(f, 0) = 0$.

2° 若 m 是偶数 ($m \geq 0$), 则 $(*)$ 的 z^{-1} 项系数为

$$(-1)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{(m+1)!}$$

~~$\text{Res}(f, 0) = \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}}{(m+1)!}$~~

即 $\text{Res}(f, 0) = (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{(m+1)!}$

3° 若 m 是偶数 ($m < 0$) 则 $(*)$ z^{-1} 项系数为 0.

∞ 点的留数为 0 点留数的相反数.

NO.

37

§2. 利用留数计算实积分.

1. $\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$ 型. $f(x, y)$ 为有理函数.

$$\text{例} \quad \int_0^\pi \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$$

$$\begin{aligned} \text{令 } z=e^{i\theta} \\ \frac{d\theta}{d\theta} = \frac{dz}{iz} \end{aligned} \quad \frac{1}{2} \int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{2+\frac{z+z^{-1}}{2}} = \dots$$

$$= \frac{1}{2} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+4z+1}$$

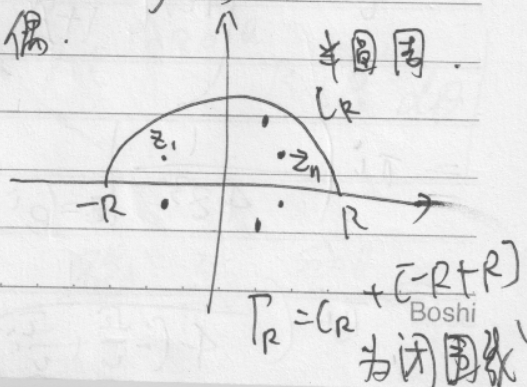
极点 $-2 \pm \sqrt{3}$
(但 $-2+\sqrt{3}$ 在 $|z|=1$ 内)

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \text{Res}\left(\frac{1}{z^2+4z+1}, -2+\sqrt{3}\right)$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2z+4} \Big|_{z=-2+\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$ ($\deg p+2 \leq \deg q$)

且 $q(x)$ 无实根, 则 $\deg q$ 偶.
(虚根必共轭成对出现)



NO.

38

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz$$

令 R 充分大包含 D 的所有零点

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz$$

令 $R \rightarrow \infty$. 我们有 $\int_{C_R} f(z) dz \rightarrow 0$.

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq M(R) \cdot \pi R \leq \frac{\pi M_0}{R} \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} M(R) &= \max |f(z)| \\ &= O\left(\frac{1}{R^2}\right) \\ &\leq \frac{M_0}{R^2} \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{Q(x)} dx = \frac{2\pi i}{1} \sum_{k=1}^n \text{Res}\left(\frac{p}{Q}, z_k\right)$$

$$\begin{aligned} \text{例} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4} \cdot 2\pi i \cdot \text{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, z_k\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2\pi i \left(\text{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) + \text{Res}\left(\frac{1}{1+z^4}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \right) \\ &= \pi i \left(\frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} + \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}} \right), \\ &= \pi i \left(\frac{1}{4(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)} + \frac{1}{4(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)} \right) \end{aligned}$$

Boshi

$$= \pi i \left(\frac{1}{-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i} + \frac{1}{2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i} \right)$$

$$= \pi i \frac{4\sqrt{2}i}{-16} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \pi$$

~~$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$~~

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{i\lambda x} dx \rightarrow f$$

(deg p + 1 ≤ deg q)

~~$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$~~

~~$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$~~

~~$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, i\right)$$~~

~~$$= \pi i \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$$~~

约当引理: 设 $f(z)$ 及 $\Gamma_R: z = Re^{i\theta}$
($0 \leq \theta \leq \pi$)

连续

$$f(Re^{i\theta}) \xrightarrow{0 \leq \theta \leq \pi} 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

$$R) \int_{\Gamma_R} f(z) e^{i\lambda z} dz \rightarrow 0$$

证:

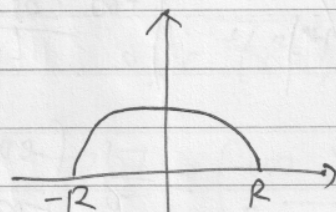
$$\left| \int_{\Gamma_R} f(z) e^{i\lambda z} dz \right| \leq \int_0^\pi |f(Re^{i\theta})| e^{-\lambda R \sin \theta} R d\theta$$

$$\leq \varepsilon R \int_0^\pi e^{-\lambda R \sin \theta} d\theta$$

$$= 2\varepsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R \sin \theta} d\theta$$

$$\frac{2}{\pi} \theta \leq \frac{\sin \theta}{\theta} \leq 1$$

Boshi



NO. 40

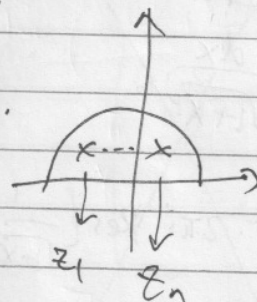
$$\leq 2\varepsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}\lambda R\theta} d\theta = \frac{\pi\varepsilon}{\lambda} (1 - e^{-\lambda R})$$

$< \frac{\pi}{\lambda} \varepsilon \cdot (R \text{ 充分大})$, 故结论成立

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{+i\lambda x} dx,$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{-R}^R f(x) e^{+i\lambda x} dx + \int_{\Gamma_R} f(z) e^{+i\lambda z} dz \right).$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f(z) e^{+i\lambda z}, z_k).$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx.$$

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx.$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2} dx.$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{-\lambda}$$

NO.

41

4. 例) $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2} dx$ (广义积分).

评注: $\ln z$ 是多值函数. 本题用微分方法计算极为困难, 用复变函数较为方便.

$$\begin{aligned}
 & \int_{-R}^{-r} \frac{\ln z}{(z^2+1)^2} dz + \int_{C_R^+} \frac{\ln z}{(z^2+1)^2} dz \\
 & + \int_r^R \frac{\ln z}{(z^2+1)^2} dz + \int_{C_r^-} \frac{\ln z}{(z^2+1)^2} dz \\
 & \stackrel{I}{=} 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{\ln z}{(z^2+1)^2}, i \right) = 2\pi i \left(\frac{\ln z}{(z+i)^2} \right)' \Big|_{z=i} = \cancel{2\pi i} \\
 & \int_r^R \frac{\ln z}{(z^2+1)^2} dz \xrightarrow{z=x} I \\
 & \int_{-R}^{-r} \frac{\ln z}{(z^2+1)^2} dz \stackrel{z=-x}{=} - \int_R^r \frac{\ln x + i\pi}{(x^2+1)^2} dx = \int_r^R \frac{\ln x + i\pi}{(x^2+1)^2} dx
 \end{aligned}$$

$-\pi < \arg z \leq \pi$

$$\left| \int_{C_R^+} \frac{\ln z}{(z^2+1)^2} dz \right| \leq \frac{\sqrt{(\ln R)^2 + \pi^2}}{(R^2-1)^2} \pi R \rightarrow 0 \quad \rightarrow I + \int_0^{+\infty} \frac{i\pi}{(x^2+1)^2} dx$$

$$\left| \int_{C_r^-} \frac{\ln z}{(z^2+1)^2} dz \right| \leq \frac{\sqrt{(\ln r)^2 + \pi^2}}{(1-r^2)^2} \pi r \rightarrow 0$$

Boshi

故令 $r \rightarrow 0$, $R \rightarrow +\infty$ 有

$$2I + \int_0^{+\infty} \frac{i\pi dx}{(1+x^2)^2} = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}, i \right)$$

$$\Rightarrow 2I + i\pi \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}i$$



$$\Rightarrow 2I = \operatorname{Re} \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}i \right)$$

~~$$\Rightarrow I = -\frac{\pi}{4}$$~~

$$\Rightarrow I = -\frac{\pi}{4}$$

我们顺便得出 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}$ (不用计算)

Remark: 一个复变函数积分能同时得到 2 个实变函数积分.

即对比实部与虚部即可.

多幅原理与儒歇定理.

$f(z)$ 非常数.

~~定义~~ 定理: 设 D 是复围线 C 围成的区域, $f(z)$ 在 D 内除极点外解析.

且在 C 上解析无零点, 则 $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$

$f(z)$ 在 D 内零点 (数)

极点 (数)

注意到 $(\ln f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$ (对数导数).

证: $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ ($g(z_0) \neq 0$)

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z - z_0)^{k-1} g(z) + (z - z_0)^k g'(z)}{(z - z_0)^k g(z)}$$

$$= \frac{k}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \rightarrow \text{解析函数}.$$

$$\text{故 } \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum \operatorname{Res} \left(\frac{f'}{f}, z_j \right) \quad (\in \mathbb{N})$$

$$+ \sum_{k=1}^p \operatorname{Res} \left(\frac{f'}{f}, z_j' \right) \quad \text{即证}$$

(-p)

规则 IV. $\text{Res}\left(f(z), \infty\right) = -\text{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right)$

$$(\ln f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

$f(z)$ 取值要落在 $\ln$ 的单值分支中.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^K \int_{C_j} (\ln f(z))' dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^K (\ln f(z_j) - \ln f(z_{j-1}))$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^K (\ln |f(z_j)| + i \arg f(z_j))$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^K (\arg f(z_j) - \arg f(z_{j-1}))$$

$$= \frac{\Delta_C \arg f(z)}{2\pi}$$

幅角原理.

$$= N - P$$

儒歇定理: 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 $\bar{D} = D \cup C$ 上解析.

且在 C 上 $|g(z)| < |f(z)|$ 则 $f(z) + g(z)$ 与 $f(z)$ 在 D 内的 ~~零点个数~~ 零点个数 (计重数) 相同.

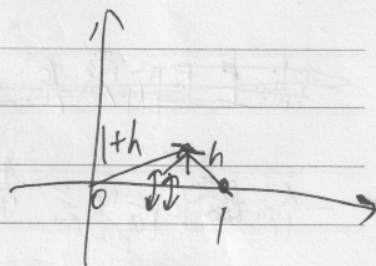
证: 记 $N(f, D)$ 为 f 在 D 内零点个数

$$\text{则 } N(f+g, D) = \frac{\Delta \arg(f+g)}{2\pi} \stackrel{?}{=} \frac{\Delta \arg f}{2\pi} = N(f, D)$$

$$f+g = f\left(1 + \frac{g}{f}\right) \quad \text{则 } \Delta \arg\left(1 + \frac{g}{f}\right) = 0.$$

$$\frac{g}{f} = h \Rightarrow |h| < 1 \quad (\text{在 } C \text{ 上}).$$

$$\frac{g}{f}$$



$$\text{故 } \Delta \arg\left(1 + \frac{g}{f}\right) = 0$$

$(1+h)$ 上下振荡

例 $z^8 - 6z^5 + z^3 - 1 = 0$ 在 $|z| < 1$ 的根的个数.

$$\text{设 } f(z) = -6z^5 \quad g(z) = z^8 + z^3 - 1.$$

$$\text{在 } |z|=1 \text{ 上有 } |g(z)| \leq 3 < 6 = |f(z)|$$

故 $\bullet$ 原式零点个数是 f 在 $|z| < 1$ 内个数.

故原式在单位圆内部有 5 个根 (根据单位圆周上无根)

第二章 保形映射.

解析函数非常数的话.

零点是孤立的

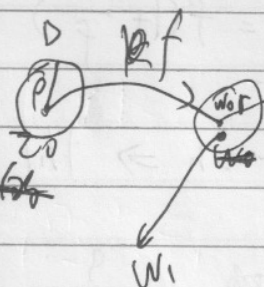
§1. 解析函数的映射性质

引理: 设 $f(z)$ 在 z_0 点解析, $w_0 = f(z_0)$ 且 z_0 为 $f(z) - w_0$ 的 k 阶零点, 则对 ~~任意~~ 任意充分小的正数 ρ , 存在 $r > 0$ 使得当

$0 < |w_1 - w_0| < r$ 时, $f(z) - w_1$ 在 $0 < |z - z_0| < \rho$ 内有 k 个一阶零点

~~一点是 k 阶零点, 附近的零点是 k 对 1 的~~

一点是 k 阶零点, 则附近的像是 k 对 1 的.



要证 $N(f(z) - w_1, D) = k$ 且都是简单零点

$D: |z - z_0| < \rho, C: |z - z_0| = \rho.$

$f(z) - w_0 \neq 0, f'(z) \neq 0 \quad (z \in C)$

① $r = \min_{z \in C} |f(z) - w_0|$

② $|f(z) - w_0| \geq r > |w_0 - w_1|$ 在 C 上.

由儒歇定理

$$N(f(z) - w_0, D) = N(f(z) - w_1, D) = k$$

$$N(f(z) - w_1, D) = N(f(z) - w_0, D) = k$$

$$(f(z) - w_0) + (w_0 - w_1)$$

$$f'(z_1) \neq 0 \Leftrightarrow (\text{若 } z_1 = z_0, \text{ 则 } w_1 = f(z_1) = f(z_0) = w_0)$$

定理1. 设 $f(z)$ 在区域 D 内单叶解析. 则 $f'(z) \neq 0$. ($z \in D$).

证明简单, 应用上述引理 ~~不难~~ 即可

逆命题不成立, $f(z) = e^z$ ~~$f'(z) \neq 0$~~

定理1.2. 设 $f(z)$ 在 z_0 点解析. 且 $f'(z_0) \neq 0$. 则 $f(z)$ 在 z_0 的某一个邻域内单叶解析.

事实上, 要缩小定义域区间使得 $(z_0) \rightarrow (f(z_0))$ 为区域内

一一映射才可以, 不能简单应用引理. 要缩小定义域区间后应用引理才可以. 因为引理只保证满射.

定理3 (区域性质): 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析. 且不恒等于常数. $D_1 = f(D)$ 是一区域, 即 f 确定从 D 到 D_1 的一个满射.

证明书P112 ~ 111 ~ 112 拓扑的观点证明的

推广: 最大模原理 (其实应该叫非最大模原理).

$f(z)$ 在 D 内解析. 并且 $f(z)$ 在 D 内某一点内达到最大值.
则 $f(z) \equiv c \quad (z \in D)$.

证: ~~$f(z)$ 在 D 内解析~~ 书 P111 证明.

定理 4. 设 $w = f(z)$ 在区域 D 内单叶解析. 则其反函数 $z = g(w)$ 在 $\Omega = f(D)$ 内解析. 且 $g'(w) = \frac{1}{f'(z)}$.

证. $\forall \varepsilon > 0 (\leq \rho) \exists \delta > 0$. s.t. $\forall w_1: 0 < |w_1 - w_0| < \delta$

$f(z) - w_1$ 在 $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ 一定有一个零点 z_1

即 $f(z_1) - w_1 = 0$ 即 $z_1 = g(w_1)$

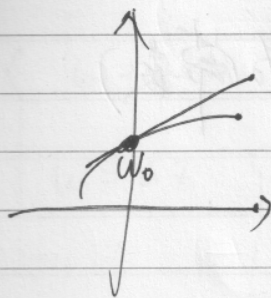
于是 $|g(w_1) - g(w_0)| < \varepsilon$ 即 $g(w)$ 在 w_0 连续.

即有 g 在 Ω 内连续

$$\text{于是 } \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{1}{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}} \rightarrow \frac{1}{f'(z_0)}$$

$$\text{即 } g'(w) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

~~arg~~ $\arg z'(z_0)$ (倾角).



$$w = f(z)$$

$$w(t) = f(z(t))$$

$$w'(t_0) = f'(z_0(t_0)) (z'(t_0))$$

$$= f'(z_0) z'(t_0) \neq 0$$

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0)$$

$$\Rightarrow \arg w'(t_0) - \arg z'(t_0)$$

$$= \arg f'(t_0) \text{ 称为旋转角不变性.}$$

要证 $\arg z_2'(t_0) - \arg z_1'(t_0)$

$$= \arg w_2'(t_0) - \arg w_1'(t_0)$$

这由旋角不变性保证.

这个性质就是解析函数的保角性.

$$\left| \frac{f(z(t)) - f(z(t_0))}{z(t) - z(t_0)} \right| = \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \rightarrow |f'(z_0)|$$

保角映射 $\begin{cases} \text{保角} \\ \text{单叶} \end{cases}$ (导数处处不为0) $\Leftrightarrow$ 单叶解析

§ 2 (分式) 线性函数 (变换. 映射)

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad (ad-bc \neq 0 \text{ 即不为常数})$$

若 $c=0$, $w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ 称为整线性函数.

$$\text{反函数 } z = \frac{-dw+b}{cw-a} \quad ((-d)(-a)-bc \neq 0)$$

若 $c \neq 0$, 当 $z = -\frac{d}{c}$ 时, $w=0$.

$$z = \infty \text{ 时, } w = \frac{a}{c}$$

$\hat{\mathbb{C}}$ 是 Riemann 球

线性映射是 $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ 的双射.
且是保角映射.

$$w = az + b$$

$$\updownarrow$$

$$W = \frac{1}{w}$$

$$\updownarrow$$

$$z = \frac{1}{z}$$

变北极为南极为

$$W = \frac{1}{a \cdot \frac{1}{z} + b} = \frac{z}{a+bz}$$

NO.

51

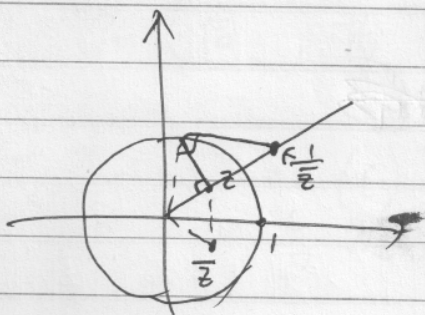
$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{若 } c=0 \text{ 则 } d \neq 0. \quad w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

$$\begin{cases} w = z + b & \text{平移} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w = az & \begin{cases} w = e^{i\theta} z & \text{旋转} \\ w = rz & \text{伸缩} \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{若 } c \neq 0 \quad w = \frac{\frac{a}{c}(cz+d) - \frac{ad}{c} + b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c}}{z + \frac{d}{c}}$$

$$w = \frac{1}{z} \quad \text{反演变换} \quad \begin{cases} w = \frac{1}{z} \\ w = \bar{z} \quad (\text{关于实轴对称}) \end{cases}$$



2. 映射性质: (1) 保角性.

(1) 保“圆”性. (映“圆”为“圆”)

把 \$\mathbb{C}\$ 上的圆周变为 \$\mathbb{C}\$ 上的圆周.

$$A(x^2+y^2) + bx + cy + d = 0$$

直线也算圆周.

(在 Riemann 球上看
直线是过北极的圆周)

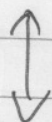
NO.

52

$$\text{令 } z = x + iy \quad x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$A z \bar{z} + \bar{\beta} z + \beta \bar{z} + D = 0 \quad \left(\beta = \frac{B + Ci}{2} \right)$$

$$\text{令 } w = \frac{1}{z} \text{ (反演变换)}$$



$$\Rightarrow A + \bar{\beta} w + \beta w + D w w = 0 \text{ 也是圆.}$$

(2) 保交比. (令 z_1, z_2, z_3, z_4 为 4 个两两相异点.)

$$\text{交比 } (z_1, z_2, z_3, z_4) \triangleq \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} \bigg/ \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

令 $w_j = L(w_j) \quad (j=1,2,3,4)$. L 为分式线性变换

$$\text{则 } (w_1, w_2, w_3, w_4)$$

$$= (z_1, z_2, z_3, z_4),$$

约定: 允许一个是无穷远点.

(3) 保对称点性. 设 Γ 上两点 z_1, z_2 关于圆周 Γ 对称.

$w = L(z)$ 为一分式线性变换. 则 $w_1 = L(z_1)$

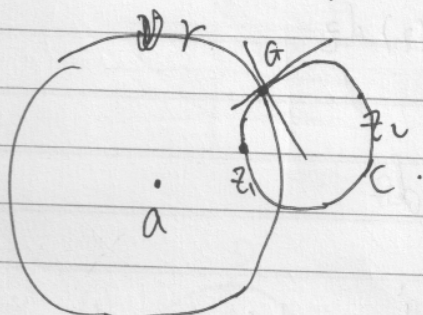
和 $w_2 = L(z_2)$ 关于圆周 $\Gamma = L(\Gamma)$ 对称

$(z_1, z_2 \neq a)$ 关于 ~~Γ~~ $\Gamma: |z-a|=r^2$ 对称 若 $(z_1-a)(\overline{z_2-a}) = r^2$

此外约定 a 与 ∞ 对称.

引理: Γ 上相异两点 z_1 和 z_2 关于圆周 Γ 对称

$\Leftrightarrow$ 过 z_1 和 z_2 的任意圆周(包括直线)与 Γ 正交



这由平面几何中的切割线定理得证.

设 C' 是过 w_1 和 w_2 的圆周, 则 $C = \angle^{-1}(C')$ 是过 z_1 和 z_2 的圆周, 故 C 与 Γ 正交.

证角

$\Rightarrow C' = \angle(C)$ 与 $\Gamma = \angle(r)$ 正交.

$\Rightarrow w_1$ 与 w_2 关于 Γ 对称.

规则IV的证明:

$$\operatorname{Res}(f(z), \infty) = -\operatorname{Res}\left(f\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{1}{z^2}, 0\right)$$

事实上, 在留数的定义中, 取正向简单闭曲线 C 为半径足够大的正向圆周: $|z| = \rho$. 令 $z = \frac{1}{\xi}$.
并设 $z = \rho e^{i\theta}$, $\xi = re^{i\varphi}$ 则 $r = \frac{1}{\rho}$, $\varphi = -\theta$.

$$\text{于是 } \operatorname{Res}(f(z), \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^{-1}} f(z) dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-2\pi} f(\rho e^{i\theta}) \rho i e^{i\theta} d\theta$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{re^{i\varphi}}\right) \frac{i}{re^{i\varphi}} d\varphi$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{re^{i\varphi}}\right) \frac{d(re^{i\varphi})}{(re^{i\varphi})^2}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\frac{1}{\rho}} f\left(\frac{1}{\xi}\right) \cdot \frac{1}{\xi^2} d\xi$$

$$(|\xi| = \frac{1}{\rho} \text{ 取正向})$$

由于 $f(z)$ 在 $\rho < |z| < +\infty$ 解析

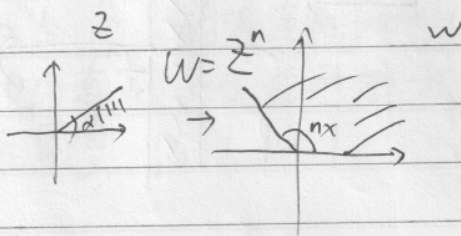
故 $f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ 在 $0 < |\xi| < \frac{1}{\rho}$ 解析.

§3 由某些初等函数构成的共形映射.

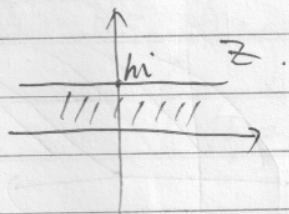
1. 幂函数.

(1) $w = z^n$

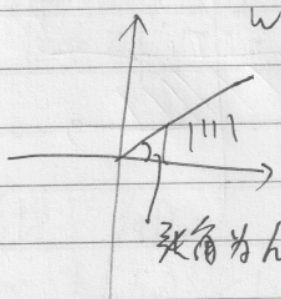
$w = z^{\frac{1}{n}}$



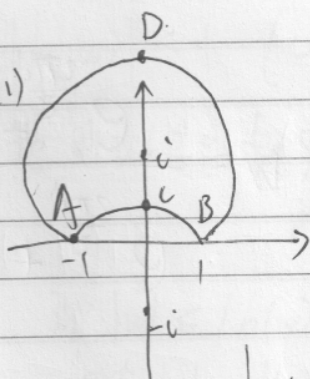
2. 指数函数与对数函数



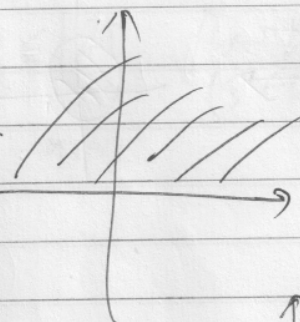
$w = e^z$



例. (1)

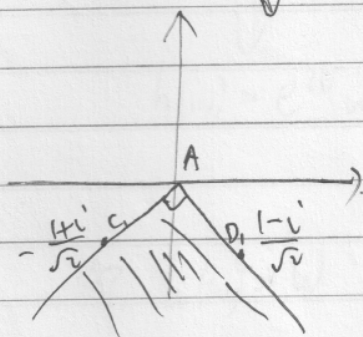


$w = -i \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2$

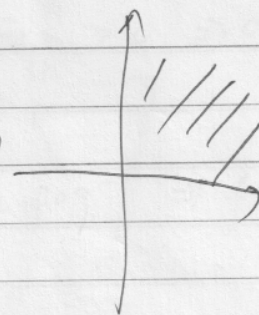


$w_1 = \frac{z+1}{z-1}$

$w_0 = w_2^2$

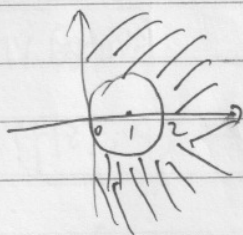


$w_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} w_1$

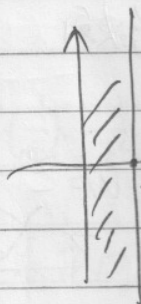


$B_1 \infty$

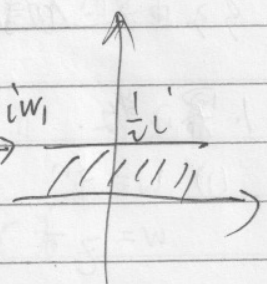
(2)



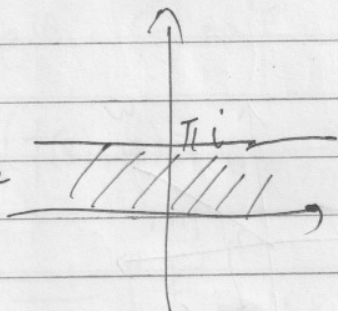
$$w_1 = \frac{1}{z}$$



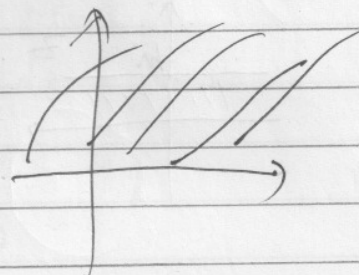
$$w_2 = iw_1$$



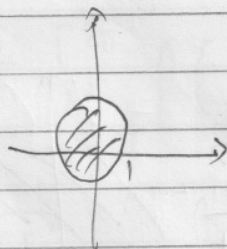
$$w_3 = 2\pi w_2$$



$$w_4 = e^{w_3}$$



$$w = \frac{w_4 - i}{w_4 + i}$$



線上,

$$w = \frac{e^{\frac{2\pi i}{z}} - i}{e^{\frac{2\pi i}{z}} + i}$$

§4. 黎曼映射定理和边界对应原理

黎曼映射定理: 设 D 为 $\mathbb{C}$ 上的单连通区域 (无洞), 其边界至少包含两点. 那么在 D 内存在一个单叶解析函数 $w=f(z)$ 将 D 共形映射成单位圆盘 $D_0: |w| < 1$.

若共形映射满足 $f(z_0)=0$, $f'(z_0)>0$, 则 f 唯一性: 设 $w=g(z)$ 也满足同样的条件.

$$\text{令 } h = g \circ f^{-1} \quad \text{注意到 } h(0)=0$$

$$h'(0) = \frac{g'(z_0)}{f'(z_0)} > 0$$

h 把 D_0 单叶解析地变为 D_0 .

$$|h(w)| < 1 \quad (w \in D_0) \Rightarrow |h(w)| \leq |w|$$

$$\text{同样地对 } h^{-1} = f \circ g^{-1} \text{ 有 } \underbrace{|h^{-1}(\xi)|}_{w} \leq \underbrace{|\xi|}_{h(w)} \quad \left(\begin{array}{l} w = h^{-1}(\xi) \\ \xi \in D_0 \end{array} \right)$$

$$\text{即 } |w| \leq |h(w)|.$$

$$\text{即有 } |w| = |h(w)|$$

$\Downarrow$

$$h(w) = e^{i\theta} w \Rightarrow h'(0) = e^{i\theta} > 0 \Rightarrow e^{i\theta} = 1$$

$$\text{即 } h(w) = w \quad \text{即 } h^{-1} = 1_A = f \circ g^{-1} \Rightarrow f = g$$

2. 边界对应原理.

设围线 C^+ 与 Γ^+ 分别为单连通区域 D 与 G 的边界

(1) 若 $w = f(z)$ 将 D 共形映射成 G , 则 $f(z)$ 可以扩张成

$\bar{D} = D \cup C^+ \longrightarrow G = G \cup \Gamma^+$ 的 -- 映射 $F(z)$

($F|_D = f$)

(2) 若 $w = f(z)$ 在 D 内解析, 在 $\bar{D}$ 上连续且是 C 到 Γ 的 -- 映射. 则 $w = f(z)$ 单叶. 推论: 将 D 共形映射成 G

(且 C^+ 到 Γ^+)

证明 (2): $N(f(z) - w_1, C)$

$$= \frac{1}{2\pi i} \Delta_C \arg f$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \Delta_C \arg (f(z) - w_1)$$

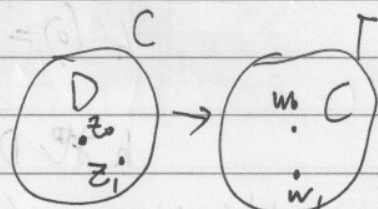
$$= \begin{cases} \pm 1, & w_1 \in G, \quad (N = -1 \text{ 不可能}) \\ 0, & w_1 \notin \bar{G} \end{cases}$$

$$\Rightarrow N(f(z) - w_1, C) = 1 \quad (\forall w_1 \in G)$$

$$\forall w_1 \in G, \exists ! z_1 \in D \text{ 使 } f(z_1) - w_1 = 0 \Rightarrow G \subseteq f(D) \subseteq \bar{G}$$

(既满又单)

$$\text{推论 } f(D) \subseteq G$$



$$w_1 = f(z_1)$$

若 $\exists w_2 \in \partial G (= \bar{G} \setminus G)$ 且 $w_2 \in f(D)$ ($\therefore f(D)$ 是区域)

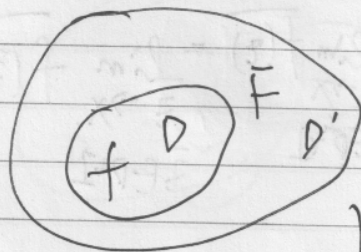
因 $f(D)$ 是区域, 故 w_2 是 $f(D)$ 的内点

这导致 $f(D)$ 含 G 的外部基点, 矛盾!

综上 $f(D) = G$. $\therefore f$ 是 D 到 G 的双射 (共形映射)

第七章 解析开拓

解析开拓 (延拓)



$D \subset D'$ (区域)
若 $F|_D = f$
则称 F 为 f 的
解析开拓
(F, D') (f, D)

1. 对称原理.

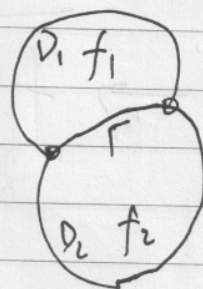
定理: 若 $f_j(z)$ 在区域 D_j 内解析 ($j=1,2$)

D_1 与 D_2 不相交, 但有一公共边界 Γ (不

端点) 且 $f_j(z)$ 在 $D_j + \Gamma$ 连续

且 $f_1|_{\Gamma} = f_2|_{\Gamma}$

$$\text{那么 } F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \\ f_2(z), & z \in D_2 \\ f_1(z) = f_2(z), & z \in \Gamma \end{cases}$$



且 $F(z)$ 在区域 $D_1 + \Gamma + D_2$ 内解析 (透弧)

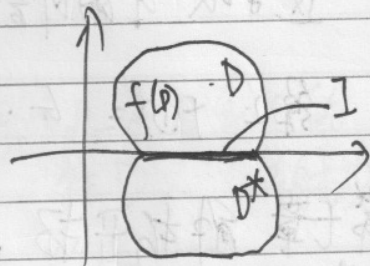
易由柯西定理及莫勒拉定理证之

对称原理.

设 $f(z)$ 在 D 内解析. 在 $D+I$ 上连续, 且 $f|_I$ 为实函数, I 为实轴上的开区间且是 D 的边界的一部分.

D 在实轴上方, D^* 是 D 关于实轴的对称区域

$$\text{令 } F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D+I \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in D^* \end{cases}$$



$$\text{证: } x \in I. \quad \lim_{\substack{z \rightarrow x \\ z \in D+I}} \overline{f(z)} = \lim_{\substack{z \rightarrow x \\ z \in D+I}} \overline{f(z)} = \overline{f(x)} = f(x) = \overline{f(x)}$$

$$\forall z_0 \in D^*$$

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{\overline{f(z)} - \overline{f(z_0)}}{\bar{z} - \bar{z}_0} = \overline{\left(\frac{f(\bar{z}) - f(\bar{z}_0)}{\bar{z} - \bar{z}_0} \right)}$$

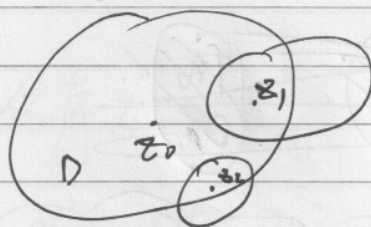
$$\rightarrow \overline{f'(\bar{z}_0)} \quad \left(\begin{array}{l} z \rightarrow z_0 \\ \Rightarrow \bar{z} \rightarrow \bar{z}_0 \end{array} \right)$$

2. 用幂级数展开开拓.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad (|z-z_0| < R(>0))$$

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_1)^n$$

~~例 2. f~~



例 1. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad (|z| < 1)$

例 2. $f(z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots$
 $= \ln(1+z) \quad (|z| < 1)$

例 3 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = z + z^2 + z^4 + z^8 + \dots$

∴ $|z|=1$ 为自然边界

3. 完全解析函数与黎曼面

(解析) 函数元 (素)

(f, D) f 在区域 D 内解析

(f, D)

§ 完全解析函数与 Riemann 面.

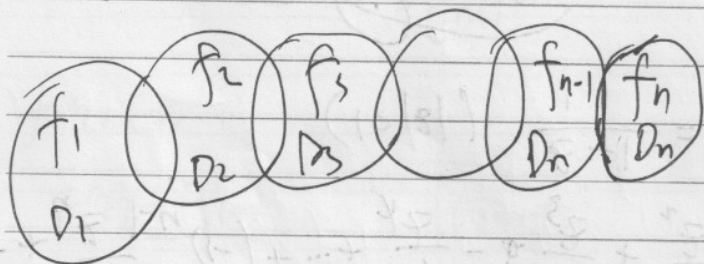
(解析) 函数元(素): (f, D) : $f(z)$ 在区域 D 内解析且为

直接解析开拓: (f_1, D_1) 与 (f_2, D_2) , $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$.

互为(间接)解析开拓: 称 (f_1, D_1) 与 (f_n, D_n)

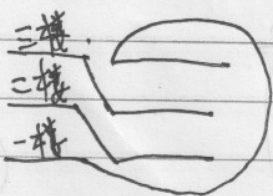


互为间接解析开拓.



一般解析函数 $\{(f_\alpha, D_\alpha) \mid (f_\alpha, D_\alpha) \text{ 与 } (f_\beta, D_\beta) \text{ 互为解析开拓}\}$
完全解析函数: 最大的一般解析函数.

例 $\sqrt{z}$.

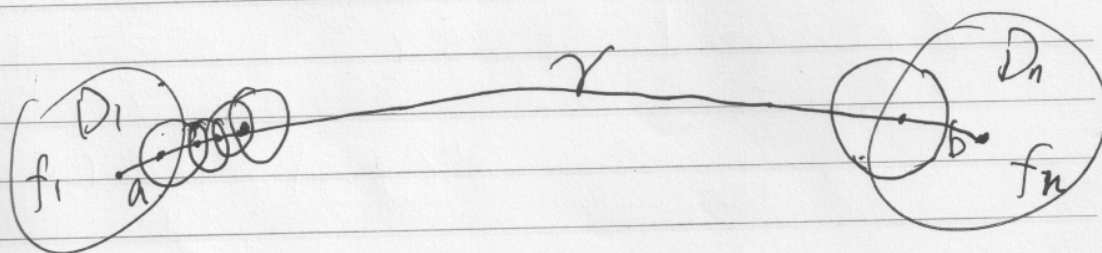


转 2π 多一个 w

转 4π 多一个 w^2

转 6π 回到原来

4. 沿曲线的解析开拓.



要求: $D_1, \dots, D_n$ 的圆心依序在 γ 上

且 D_k 的圆心在 D_{k-1} 内. ($k=2, 3, \dots$)

称 (f_n, D_n) 是 (f_1, D_1) 沿曲线 γ 的解析开拓.

单值性定理: 设 G 是 $\mathbb{C}$ 平面上一个单连通区域, 但不是整个 $\mathbb{C}$ 平面. 设 (f, D) 是一解析函数元素, $D \subset G$. 并且沿

G 内从 D 的圆心出发的任何简单连续曲线, (f, D) 能解析开拓. 那么存在 G 内的一个单值解析函数 $g(z)$.

使得在 D 内, $g(z) = f(z)$.