拓扑的初步概念

天地有正气，杂然赋流形。
—— 文天祥

Nicholas Bourbaki 先生认为数学中有三种基本结构：代数结构、拓扑结构、序结构。拓扑学(topology)是研究拓扑结构的数学分支，自然地，它在现代数学中就占据着重要的地位。为便于读者理解正文，作者将简要介绍一些拓扑初步概念，它们的确切定义可以参见任何一本拓扑入门教材，例如[Arm],[You]。[BE]则是一本很好的普及读物。

拓扑学最基本的研究对象是拓扑空间(topological space)。所谓拓扑空间就是一个集合，上面赋予了拓扑结构。更确切的定义不适合在这里写出来，读者只要知道：有拓扑结构后，“连续”这个概念就可以定义了。直线、平面、三维欧氏空间、各种曲线、曲面、多面体......都可以作为拓扑空间的例子。

拓扑空间之间可以定义连续映射(continuous map)。设 X,Y 是两个拓扑空间，f: X -> Y 是一个连续映射，如果 f 有逆映射，而且逆映射也是连续的，那么就说 f 是一个同胚映射(homeomorphism)，并且说 X 与 Y 同胚(homeomorphic)。比如，不同大小的两个球面就是同胚的，它们跟凸多面体的表面也是同胚的。拿一个曲面，即使把它捏瘪，或者再揉一揉，但只要不撕破，不把原先不相连的两小块粘到一起，这个变化后的曲面和原来的还是同胚的。可以想象，在同胚变换下，几何对象的很多性质都会改变，如距离、角度等，但仍然有一些性质保持不变，拓扑学就要研究这些不变的性质。

同伦等价(homotopy equivalent)是拓扑学中所关心的另外一种等价关系，它的要求比同胚更宽松。取一个拓扑空间，对它进行某些特定的连续形变，所得到的空间与原来的空间是同伦等价的。举个例子：初始空间是一个实心球，我们可以把它压缩成一张没有体积的圆盘，再搓成一条没有面积的线段，甚至挤成一个连长度都没有的点，得到的这些空间都跟原来的同伦等价；我们也可以从原来的实心球里“长”出半个圆盘来作为“耳朵”(半圆盘的直径还贴在实心球表面上)，甚至再“长”出几条线段来作为“触角”(线段的一端在实心球表面上)，所得到的空间还

是跟原来的同伦等价。“终结者 2”里面那个给人深刻印象的液体机器人，它在身体没有撕裂开的情况下的各种形态就是同伦等价的。

虽说拓扑学可以研究非常一般的“拓扑空间”，但拓扑学家最关心的还是流形的拓扑。“流形”(manifold)的概念最早是在 1854 年由 Riemann 提出的(德文 Mannigfaltigkeit)，现代使用的流形定义则是由 Hermann Weyl 在 1913 年给出的。江泽涵先生对这个名词的翻译出自文天祥《正气歌》，日本人则将之译为“多样体”，二者孰雅孰鄙，高下立判。

流形定义为满足 Hausdorff 公理(这里不作介绍了)的拓扑空间，每个点的局部都同胚于 n 维空间 R^n. 按定义，R^n 本身就是一个流形；圆周是流形，每点的局部都有一段弧同胚于 R^1；各种曲面都是流形，局部同胚于 R^2. 如果忽略黑洞之类的奇点的话，我们所处的宇宙也是一个流形：无论你处在哪一个时空点，环顾一下四方，总觉得周围就是普通的三维空间 R^3，再算上时间这一维度，局部也还是 R^4，不会有分岔的现象发生。

古人对世界的看法没有我们这么先进，提出的大部分宇宙模型都是有限的，而且有边界。盘古开天辟地，轻清者上浮而为天，重浊者下凝而为地。《三国演义》里秦宓难张温，问“又未知轻清之外，还是何物？”张温便无言以对。这种有边界的宇宙模型，用拓扑的语言来说，就是一个“带边流形”。带边流形的边界是比它本身低一维的(无边)流形。例如圆盘是一个二维带边流形，它的边界是圆周；实心球是三维带边流形，边界是球面。

读者在微积分里可能会碰上“紧致”(compact)的概念。对流形来说，紧致就是任何点列都有收敛子序列。球面、环面、实心球、圆盘等都是紧致的，但 R^n 就不紧，因为其中能找到一串点趋向于无穷远。紧致性某种程度上相当于有限性。科普读物里讲到现代宇宙模型，经常会说它是“有限而无界”的，然后费半天唇舌来解释。其实用数学语言说，就是“紧致而无边”。紧致无边流形称为闭(closed)流形。

另一个经常会见到的概念是可定向性(orientability)。不可定向流形最简单的例子是科普读物里经常出现的 M\"obius 带。它是一张只有一个侧面的曲面，蚂蚁在上面爬一圈后就到了原来所处位置的另外一“侧”。不过这种说法依赖于外围空间，并不能非常确切地反映不可定向性，笔者倒觉得科幻小说里常出现的一幕拿来描述定

向更为合适。科幻小说中经常会有人到宇宙深处旅行一圈后发现自己的左右颠倒了，这实际上就是说宇宙是一个不可定向流形。读者可以自己做一个实验：假定 M\"obius 带就是某种二维生物的宇宙，让这个二维生物在上面旅行一圈，然后就会发现它的左右颠倒了。可定向流形则是这样的一个"宇宙"，无论你在里面怎么旅行，回到原来的出发点后都不会出现左右颠倒的现象。

研究拓扑的一种方法是把拓扑问题转化为代数问题。最常见的例子是计算一个拓扑空间各个维数的同调群(homology group)和同伦群(homotopy group)，然后根据这些群的性质推断拓扑空间的性质。一维同伦群又叫做基本群(fundamental group)。如果空间的基本群是只包含单位元素的平凡群，就称它是单连通的(simply-connected)。

参考文献：

[Arm] M. A. Armstrong, "Basic topology", Springer-Verlag(1983). 中译本："基础拓扑学"，孙以丰译，北京大学出版社 (1983).

[BE] 巴尔佳斯基(Болтянский,В.Г.), 叶弗来莫维契(Ефремович

(1999).

[You] 尤承业，"基础拓扑学讲义"，北京大学出版社 (1997).

发信人: Dionysus (悲剧的诞生), 信区: Science
标 题: 庞加莱猜想-前言
发信站: BBS 水木清华站 (Wed Jul 16 23:09:33 2003), 转信

Poincar\'e 猜想

——谨以本文献给远在异世界的前斑竹 flyleaf

前言

Wir m\"ussen wissen! Wir werden wissen!
(我们必须知道！我们必将知道！)
—— David Hilbert

两年前科学版举行过一次版聚，我报告了低维拓扑里面的一些问题和进展，其中有一半篇幅是关于 Poincar\'e 猜想。版聚后，flyleaf 要求大家回去后把自己所讲的内容发在版上。当时我甚至已经开始写了一两段，但后来又搁置了。主要是因为自己对于低维拓扑还是一个门外汉，写出来的东西难免有疏漏之处，不敢妄下笔。

两年过去，我对低维拓扑这门学科的了解比原先多了，说话的底气也就比原先足了。另外，由于 Clay 研究所的百万巨赏，近年来 Poincar\'e 猜想频频在媒体上曝光；而且 Perelman 最近的工作使数学家们有理由相信我们已经充分接近于这一猜想的最后解决。所以大概会有很多人对 Poincar\'e 猜想的来龙去脉感兴趣，我也好借机一偿两年来的宿愿。

现代科学的高速发展使各学科之间的鸿沟加大，不同学科之间难以互相理解，所以非数学专业的读者在阅读本文时可能会遇到一些困难。但限于篇幅和文章的形式，我也不可能对很多东西详细解释。一些最基本的拓扑概念如"流形"，我将在本文的附录中解释。还有一些"同调群"、"基本群"之类的名词，读者见到时大可不去理会它们的确切含义。我将尽量避免使用这一类的专业术语。

作者并非拓扑方面的专家，对下面要说的很多内容都是道听途说，只知其然而不知其所以然；作者更不善于写作，写出来的东东总会枯燥无味，难登大雅之堂。凡此种种，还请读者诸君海涵。

问题的由来

Consid\'erons maintenant une vari\'et\'e [ferm\'ee] V \`a trois dimensions ... Est-il possible que le groupe fondamental de $V$ se r\'eduise \`a la substitution identique, et que pourtant V ne soit pas simplement connexe?

—— Henri Poincar\'e

在拓扑学家的眼里，篮球、排球和乒乓球并没有什么不同，它们都同胚于三维空间中的球面 S^2. (我们把 n+1 维欧氏空间中到原点距离为 1 的点的集合记作 S^n，称为 n 维球面(sphere)。) 与它们不同的一种曲面是轮胎或者游泳圈，我们管这种曲面叫环面(torus)，记作 T^2.

从环面出发可以构造更多的曲面：取两个环面，在每个上面挖一个洞，然后把两个洞的边缘粘在一起，就得到一种新的曲面，称为双环面，记作 2T^2. 从两个环面得到双环面的这种过程称为作两个环面的连通和(connected sum)。类似地，还可以作双环面与环面的连通和，得到的曲面自然就记作 3T^2...

早期拓扑学研究的主要对象就是这些形形色色的曲面。19 世纪的数学家基本上已经完成了曲面的分类，一个著名的结果是 August M\"obius 在 70 岁时得到的：可定向闭曲面只有上面所说的那些，即 S^2, T^2, 2T^2, 3T^2...

拿一个汽车轮胎，我们可以用一个绳圈把它套住，而且套得很牢，怎么晃都晃不掉，只要绳子不断、轮胎不裂。如果是皮球就不同了，你没法用绳圈把一个皮球套牢。即使你将皮球捏瘪甚至捏凹，也只能勉强用绳圈套上，稍微晃一晃就掉了。这种“用绳圈套不住”的性质是球面所独有的，数学上称为“单连通性”。

较严格地用数学语言说，球面上的任何一条闭合道路都能在球面上连续地收敛为一点。而 T^2, 2T^2 等曲面就不是单连通的，因为上面存在着一些闭合道路，不能在该曲面上连续地收缩为一点。根据 M\"obius 所证明的闭曲面分类定理，单连通的闭曲面必然同胚于球面。

数学家们在获得一个结论后，总是会寻找更加一般的结论。以前 Ecole Polytechnique 的一位物理教授面试 ukim 的时候，出了一道题，大意是在 xz 平面, zy 平面, yz 平面各放一面镜子，一束光照进来，然后如何如何。ukim 当然不会做，然后那教授给他讲了一个很好的看法。为了挽回面子，ukim 瞬间证明了这个问题可以推广到 n 维……

一百年前 ukim 的校友 Poincar\'e 同样是遵循着这种低维->高维的推广思路，
写下了前面那一段引言。今天我们把这个问题称为 Poincar\'e 猜想：

单连通的三维闭流形必然同胚于三维球面 S^3. 也就是说，如果有一个三维闭流形 M，M 中任何一条闭合道路都能在 M 内连续收缩为一点，那么 M 就同胚于 S^3.

需要指出，Poincar\'e 提出这一问题时，并不是作为一个"猜想"(见[Th2])。
因为他自己只是问"单连通的三维闭流形是否同胚于 S^3"，并没有给出一个倾向性的答案。而且他以其深刻的洞察力，看出这一问题的解决还有待时日："Mais cette question nous entra\^{\i}nerait trop loin."

参考文献：

[Mil] J. Milnor, "The Poincar\'e Conjecture", http://www.claymath.org/Millennium_Prize_Problems/Poincare_Conjecture/_objects/Official_Problem_Description.pdf, (2000).

[Th2] Thurston, W. P. "Three-dimentional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry", Bull. Amer. Math. Soc. 6(1982), 357-381.

维数的玩笑

Dimension implies direction, implies measurement, implies the more and the less.
—— Edwin A. Abbott, "Flatland"

1900 年，Poincar\'e 最初用他所创立的代数拓扑研究三维流形时，提出的问题是：如果一个流形与三维球面有着相同的同调群，那么这个流形是否同胚于 S^3？
四年后他本人给出了否定的回答。这时他已经引进了基本群，于是便将问题改成：
"如果一个三维闭流形与三维球面有相同的基本群，(即基本群平凡，或者说这个流形单连通，) 那么这个流形是否同胚于 S^3？"。这就是我们所说的"Poincar\'e

Conjecture”。

容易证明，如果一个三维闭流形单连通，那么它同伦等价于 S^3，当然也与 S^3 有相同的同调群。我们今天把与球面有相同的同调群的流形称为同调球(homology sphere)，而同伦等价于球面的流形则称为同伦球(homotopy sphere)。Poincar\'e 猜想也可以叙述为：三维同伦球一定同胚于球面。

（Poincar\'e 在 1904 年构造了一个三维同调球，其基本群是一个 120 阶群，从而对他在 1900 年提出的那个问题给了否定回答。有趣的是，尽管后人能构造出许多同调球，但只有 Poincar\'e 的那个具有有限的基本群。事实上，如果 Poincar\'e 猜想正确的话，Poincar\'e 的同调球就是唯一一个基本群有限但不同胚于 S^3 的同调球。）

我们在前一节说过，数学家总是喜欢对问题进行推广。后来的数学家推广了 Poincar\'e 的命题，提出所谓的广义 Poincar\'e 猜想：n 维同伦球一定同胚于 n 维球面 S^n. 这个问题等价于：如果一个 n 维单连通流形与 S^n 有相同的同调群，那么它同胚于 S^n.

1961 年，Stephen Smale 在[Sm]文中证明了广义 Poincar\'e 猜想在 n≥5 时成立，并因此获得了 1966 年的 Fields 奖。Smale 是一位经历丰富、特立独行的数学家。六十年代在 Berkeley 他就是反越战运动的领袖，并因此上了 FBI 的黑名单。1966 年他到莫斯科领取 Fields 奖时，又因为公开抨击苏联的国内国际政策而被 KGB 找去谈话。1998 年北大百年校庆期间，我有幸见到这位传奇人物。当时感觉他虽然面容如古井不波，眼眸中却隐藏不住顽皮好动的神色。最近出版了一本他的传记[Bat]，读者可以从中领略到他的风采。

这里有一点乍看来比较奇怪：通常我们认为高维比低维更复杂更困难，但广义 Poincar\'e 猜想首先获得证明的却是 n≥5 的情形。拓扑里这种事很常见，很多问题都是低维比高维更困难，可谓是维数开的一个玩笑。我们可以简要解释如下：维数高意味着有更多的“余地”进行一些操作。比如说，我们经常要考虑流形里的曲面。曲面是 2 维的对象，在 3 维或 4 维流形中，它的“剩余”维数是 1 或 2，太狭小；在 5 维以上流形中，“剩余”维数大于它自身的维数，有充足的余地进行操作。

1982 年，UCSD 的 Michael Freedman 完成了单连通四维流形的拓扑分类，从而证明了 4 维的广义 Poincar\'e 猜想，并因此获得了 1986 年的 Fields 奖。至此，后人提出的“广义” Poincar\'e 猜想都已经获得证明，而 Poincar\'e 原先提出的三维情形还没解决。Freedman 的工作已经超出了笔者的理解范围，有兴趣的读者可参见[FQ]和[Kir]。

Freedman 热爱攀岩，善于长跑。有一年北京大学的王诗宬同他在海边跑一万米，跑完后 Freedman 意犹未尽，立刻作了几十个俯卧撑。Freedman 的妻子是美国国家长跑队的队员，跑得比他还快。如今他已经跳槽到微软研究院，研究远未有结果的“量子场计算机”。

参考文献：

[Bat] S. Batterson, "Stephen Smale : the mathematician who broke the dimension barrier", American Mathematical Society (2000). 中译本：“突破维数障碍 斯梅尔传”，邝仲平译，上海科技教育出版社 (2002).

[FQ] M. H. Freedman, and F. Quinn, "Topology of 4-manifolds", Princeton University Press (1990).

[Kir] R. C. Kirby, "The topology of 4-manifolds", Lecture Notes in Mathematics 1374, Springer-Verlag (1989).

[Sm] S. Smale, "Generalized Poincar\'e's Conjecture in dimensions greater than four", Ann. Math. 74(1961), 391-406.

与风车搏斗的人们

为了寻求真理，我们是注定会经历挫折和失败的。
—— Denis Diderot

拓扑学的一个基本问题是流形的拓扑分类。从代数拓扑角度看，同伦球是比较简单的一类流形。Poincar\'e 猜想所问的就是，在这种几乎是最简单的情形，代数信息能在多大程度上确定拓扑信息？这是一个拓扑学家无法回避的问题。不难想象，像这样著名且重要的问题会有很多人有兴趣研究，也会有很多人认为自己已经解决。但这些人都是真正严肃的研究者，因为民间数学家恐怕连这个问题都看不懂。

1934 年，J. H. C. Whitehead (并非那位与 Bertrand Russell 齐名的哲学家 A. N. Whitehead) 在一篇文章中"证明"了这样一个结论："任何一个开的三维流形，如果同伦等价于三维欧氏空间 R^3，那么就一定同胚于 R^3"。S^3 挖去一个点就是 R^3，所以这个命题能够推出 Poincar\'e 猜想。不幸（或者说万幸？）的是，稍后 Whitehead 本人发现了其中的错误，并且举出了一个反例。(J. H. C. Whitehead 是同伦论的奠基人之一，后来在墨西哥太阳金字塔失足跌死。)

Poincar\'e 猜想有很多等价的描述，Princeton 的希腊数学家 C. D. Papakyriakopoulos 曾经把它化成一个纯粹的群论问题。Papa...是几何、拓扑领域最高奖 Veblen 奖的首届获奖者。他研究生涯后期的主要精力就放在 Poincar\'e 猜想上。后来他病入膏肓，便找来三位著名的拓扑学家到病床前，拿出一份手稿，说自己证明了 Poincar\'e 猜想。其实那三人已经发现了证明中的一个明显错误，但都没有捅破，只是安慰 Papa...说他们会仔细看一看这个证明。随后不久 Papakyriakopoulos 便辞世了。

早先给出 Poincar\'e 猜想错误证明的人很多，Whitehead 和 Papakyriakopoulos 算是其中名气最大的。当然，即使是这些错误证明，也有其价值，至少给后人树了一块"此路不通"的牌子；而且很多证明是有其正面意义的。70 年代以前关于 Poincar\'e 猜想的研究进展在[Hem]一书中有所总结。

近来来关于 Poincar\'e 猜想证明，比较出名的是 Po\'enaru 的工作。Po\'enaru 是三维拓扑领域中相当有影响的数学家，按王诗宬的说法是一个"神人"。从上世纪九十年代以来，他陆续写了一系列文章，提出了一个证明 Poincar\'e 猜想的纲领(见[Ga])。经过中间一些反复，最终他宣布已经完成了整个证明。问题是，他写的证明加起来超过了一千页......陈省身对此的评论是："一千页的证明还不如不证明。"

其实一千页并不算长，——在某些人眼里。1980 年左右，群论专家们宣布完成了有限单群的分类。整个证明由几十年间发表在各种杂志上的上百篇论文组成，总长度超过 15,000 页，其中最长的一篇论文有 1,200 页。接下来就有几个人致力于整理出系统的证明，已出版的第一卷有 800 页。他们的最终目标是一个 3,000 页左右的证明，这样才具有一定的可读性。

审阅证明基本上是一件为她人作嫁衣裳的苦差使。数学家有自己的事情要做，很难花费宝贵时间去阅读一个成百上千页的证明。所以这样的证明不容易获得同行公认。一个著名的例子是 Bieberbach 猜想。1984 年，Purdue 大学的 Louis de Branges 宣布他解决了这一单叶函数论里的核心问题，并把手稿寄给十几位专家审阅。De Branges 是一位复分析学家，但并不属于单叶函数论的圈子；他已经五十多岁了，而且名声不太好，——他曾宣称自己证明了 Riemann 假设；他用的方法是几十年前的人就使用过的老方法，在圈内人眼中这种方法根本不会成功......总之，各种因素都对 de Branges 很不利，使得没有一位美国数学家愿意审阅他那篇 385 页的论文。

好在西方不亮东方亮，世界上还有一种勤劳、勇敢、智慧、热情的生物，我们称之为苏联人。三位苏联同行把 de Branges 请到列宁格勒，开了一个学期的讨论班讲他的工作。最终苏联人审查通过了 de Branges 的论文，并把证明简化到只有 15 页，发表在 Acta Mathematica 上。后来在 Purdue 召开了一个关于 Bieberbach 猜想的国际会议，de Branges 在会上发言，一句学术的事情也没讲，尽是大骂他的上司不重视他，不给他加薪，以及抱怨美国同行们有偏见，不理睬他的证明。

但现在 Po\'enaru 的运气显然没有 de Branges 那么好，因为苏联已经不存在了......曾经有人试图阅读他的证明，结果找到了一个错误。(一千页的证明里，若是没有错误，那才是怪事。) 后来 Po\'enaru 说他已经改正了错误，但再也没有人愿意去看了。

去年在西安举行了一个几何拓扑的国际会议，Kirby 曾提议叫 Po\'enaru 作一次全会报告。但组委会认为，一个小时内讲一个一千页的证明，不会对听众有多大帮助，所以没有邀请他。也许 Po\'enaru 的想法真的行得通，但我们大概永远不会知道真相。

2000 年，千年之交，Clay 研究所组织数学界的一些领袖人物，提出数学中的七个重要问题，每个问题都悬赏百万美元征求解答，Poincar\'e 猜想便是其中之一。百万巨赏使 Poincar\'e 猜想获得了数学圈以外的名声，尤其是新闻界的关注。从此，关于 Poincar\'e 猜想的一点点风吹草动都会引起大批媒体的兴趣。

很快就有动静了。2002 年初，英国 Southampton 大学的 Martin J. Dunwoody 宣布自己解决了 Poincar\'e 猜想，证明放在网上，只有 5 页。这一新闻迅速占据了世界各地报刊的重要位置，甚至上了 Nature,Science 这样的正经科技期刊。Dunwoody 算是三维拓扑圈子里的人，六十多岁了。5 页的证明中，如果有错误，他自己应该能发现，所以人们觉得他可能会有些道理。但无论是他本人，还是他文章中所引用、致谢的人，都不是什么“神人”。就凭这些人能证明 Poincar\'e 猜想？实在让人难以置信。

错误很快就被人找出来，然后 Dunwoody 修改自己的证明；接下来又找出新的错误，又修改......数易其稿后，论文增加了一个图，页数增加到 6 页，标题也由"A Proof of the Poincar\'e Conjecture" 变成 "A Proof of the Poincar\'e Conjecture?"。但最终，Dunwoody 不得不承认，证明里漏掉了关键的一步。

注：本节标题取自 yyf 的系列文章。

参考文献：

[Ga] D. Gabai, "Valentin Po\'enaru's program for the Poincar\'e conjecture", Geometry, topology & physics, 139-166, International Press (1995).

[Hem] J. Hempel, "3-Manifolds", Princeton University Press (1976).

几何的基本观点

神乃几何学家。

—— 柏拉图

德国大学有一个传统：任何人在获得教职时必须发表就职演说。1854 年，被聘为 G\"ottingen 大学讲师的 G. F. B. Riemann 向上级提交了三个题目作为候选的就职演说标题。按惯例，上头将会在前两个题目中选择一个，所以 Riemann 只认真准备了前两个。但 Gauss 选择的是第三个。Riemann 仓促准备后便上阵了，结果整个大厅里只有 Gauss 一个人听得懂。这篇演讲成为几何学史上里程碑式的文献：《论几何学的基本假设》(\"Uber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen)。

在这篇演讲中，Riemann 提出了流形的概念，并且指出：流形上赋予一个度量后，便可以研究其几何性质，如长度、角度、曲率等等。当时已经存在了两千年的球面几何和欧氏几何，以及新兴的双曲几何，都可以归结到 Riemann 的观点下来，即，曲率分别为常数+1,0,-1 的几何。

1872 年，23 岁的 Felix Klein 在就任 Erlangen 大学教授时，发表了另外一篇对几何学影响深远的就职演说，这便是后人所说的"Erlanger Program"。Klein 提出，几何学所研究的是空间在变换群作用下不被改变的性质，并可以据此对几何学进行分类。例如，球面几何研究的就是 S^n 在群 O(n+1) 作用下不改变的性质，而欧氏几何研究的是 R^n 在平移、旋转、反射等变换下不改变的性质。

Riemann 和 Klein 对几何学的认识代表着几何学的不同侧面。Klein 的观点更为古典一些。Riemann 的思想在提出后的六十年中一直没被充分理解，也没有得到足够重
视，直到广义相对论诞生后，它才进驻到几何学的中心。

时光跳转至 20 世纪 70 年代末。William P. Thurston 在研究三维拓扑的过程的中，提出了这样一个问题：按照 Klein 的观点，三维流形上可能有多少种有意义的几何？这个问题并不困难，稍加细致的讨论后，Thurston 得出答案：八种， 它们是：

S^3 (三维球面几何)
E^3 (三维欧氏几何)
H^3 (三维双曲几何)

$S^2 \times E^1$

$H^2 \times E^1$

Nil

Sol

后几种几何的确切含义可以参见[Th4]。在这八种中，最复杂、也最重要的是双曲几何。双曲几何，或称"非欧几何"，其创立过程在很多科普书籍里都有记叙(见[LZ])，这里不再赘述。Thurston 的工作在某种程度上表明，大多数三维流形上都可以有双曲几何，因而双曲几何对于三维流形便尤其重要。

参考文献：

[LZ] 李忠，周建莹，"双曲几何"，湖南教育出版社 (1991).

[Th4] W. P. Thurston, "Three-dimensional geometry and topology", Princeton University Press (1997).